ANALIZA 1, KOLOKWIUM nr 2, 8.11.2023, godz. 8:15–9:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **5. (10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranych liczb wymiernych dodatnich k oraz C i D udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leqslant \sqrt[3]{n^4+1}+\sqrt[3]{n^4+2}+\sqrt[3]{n^4+3}+\sqrt[3]{n^4+4}+\ldots+\sqrt[3]{27n^4-1}+\sqrt[3]{27n^4} \leqslant Dn^k\,.$$

Punktacja poprawnego rozwiązania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C:

- Przy $D/C>3$ możesz otrzymać **4 punkty.**
- Przy $2\leqslant D/C\leqslant 3$ możesz otrzymać **6 punktów.**
- Przy $D/C<2$ możesz otrzymać **10 punktów.**

Zadanie **6. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}-n^6}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Zadanie **7. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{\sqrt{n^8+1}}+\frac{(n+2)^3}{\sqrt{n^8+2}}+\frac{(n+3)^3}{\sqrt{n^8+3}}+\ldots+\frac{(n+k)^3}{\sqrt{n^8+k}}+\ldots+\frac{(2n-1)^3}{\sqrt{n^8+n-1}}+\frac{(2n)^3}{\sqrt{n^8+n}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Zadanie **8. (10 punktów)**

Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$64^n < n^{2^{2023}} < 128^n\,.$$