KOLOKWIUM nr 2, 8.11.2023, godz. 8:15–9:45

Zadanie **5. (10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranych liczb wymiernych dodatnich k oraz C i D udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leqslant \sqrt[3]{n^4+1}+\sqrt[3]{n^4+2}+\sqrt[3]{n^4+3}+\sqrt[3]{n^4+4}+\ldots+\sqrt[3]{27n^4-1}+\sqrt[3]{27n^4} \leqslant Dn^k\,.$$

Punktacja poprawnego rozwiązania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C:

- Przy $D/C>3$ możesz otrzymać **4 punkty.**
- Przy $2 \leqslant D/C \leqslant 3$ możesz otrzymać **6 punktów.**
- Przy $D/C<2$ możesz otrzymać **10 punktów.**

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu suma ma $26n^4$ składników. Możemy zatem wykonać szacowania

$$26n^{16/3}=26n^4\cdot\sqrt[3]{n^4}\leqslant\sum_{i=n^4+1}^{27n^4}\sqrt[3]{i}\leqslant 26n^4\cdot\sqrt[3]{27n^4}=78n^{16/3}\,,$$

co kończy rozwiązanie wersji za **6 punktów.**

Uzyskaliśmy tu liczby $k=16/3$, $C=26$, $D=78$ i iloraz $D/C=3$.

Bardziej subtelne szacowanie wymaga rozbicia wyjściowej sumy na dwie sumy

$$\sum_{i=n^4+1}^{27n^4}\sqrt[3]{i}=\sum_{i=n^4+1}^{8n^4}\sqrt[3]{i}+\sum_{i=8n^4+1}^{27n^4}\sqrt[3]{i}\,,$$

a następnie wykonania szacowania dla każdej z sum z osobna.

Otrzymujemy

$$7n^{16/3}=7n^4\cdot\sqrt[3]{n^4}\leqslant\sum_{i=n^4+1}^{8n^4}\sqrt[3]{i}\leqslant 7n^4\cdot\sqrt[3]{8n^4}=14n^{16/3}$$

oraz

$$38n^{16/3}=19n^4\cdot\sqrt[3]{8n^4}\leqslant\sum_{i=8n^4+1}^{27n^4}\sqrt[3]{i}\leqslant 19n^4\cdot\sqrt[3]{27n^4}=57n^{16/3}\,,$$

skąd po dodaniu stronami otrzymujemy

$$45n^{16/3}\leqslant\sum_{i=n^4+1}^{27n^4}\sqrt[3]{i}\leqslant 71n^{16/3}\,.$$

To kończy rozwiązanie wersji za **10 punktów.**

Uzyskane liczby to $k=16/3$, $C=45$, $D=71$, a zatem $D/C=71/45<90/45=2$.

Zadanie **6. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}-n^6}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując na poziomie mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a na poziomie licznika wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)}\,,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}-n^6}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{11}}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}+n^{12}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}+n^6\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^{24}+n^{11}}+n^{12}}{n^{11}}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-7}}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-13}}+1}{n^{-1}}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^k}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot\frac{n^{-7}}{n^{-k}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^k}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot n^{k-7}=\frac{2^k}{2\cdot 2}=2^{k-2}\,,$$

o ile $k-7=0$, czyli $k=7$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32 dla $k=7$.

Zadanie **7. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{\sqrt{n^8+1}}+\frac{(n+2)^3}{\sqrt{n^8+2}}+\frac{(n+3)^3}{\sqrt{n^8+3}}+\ldots+\frac{(n+k)^3}{\sqrt{n^8+k}}+\ldots+\frac{(2n-1)^3}{\sqrt{n^8+n-1}}+\frac{(2n)^3}{\sqrt{n^8+n}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do ośmiu przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna szacując mianowniki przez wspólną wielkość.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{\sqrt{n^8+k}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{\sqrt{n^8+n}}=\frac{1}{\sqrt{n^8+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)^3=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{\sqrt{n^8+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{\sqrt{n^8+0}}=\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)^3=c_n\,.$$

Obliczamy sumę występującą we wzorach na a_n i c_n:

$$\sum_{k=1}^{n}(n+k)^3=\sum_{k=n+1}^{2n}k^3=\sum_{k=1}^{2n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{4n^2\cdot(2n+1)^2}{4}-\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{4n^2\cdot(2n+1)^2-n^2\cdot(n+1)^2}{4\cdot\sqrt{n^8+n}}\to\frac{15}{4}$$

oraz

$$c_n=\frac{4n^2\cdot(2n+1)^2-n^2\cdot(n+1)^2}{4\cdot n^4}\to\frac{15}{4}\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa **15/4**.

Zadanie **8.** **(10 punktów)**

Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$64^n < n^{2^{2023}} < 128^n \,.$$

Rozwiązanie:

Ślepa uliczka

Przyjmijmy $n=2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$64^{2^k} < 2^{k\cdot 2^{2023}} < 128^{2^k} \,,$$

czyli kolejno

$$6\cdot 2^k < k\cdot 2^{2023} < 7\cdot 2^k \,,$$

$$6\cdot 2^{k-2023} < k < 7\cdot 2^{k-2023} \,. \qquad (\heartsuit)$$

Jednak nie udaje się dobrać[1] liczby naturalnej k, która spełniałaby nierówności ($\heartsuit$). Stąd wniosek, że nie istnieje liczba n będąca potęgą dwójki i spełniająca warunki zadania. Musimy spróbować czegoś innego.

Rozwiązanie poprawne

Przyjmijmy[2] $n=k\cdot 2^{2023}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$64^{k\cdot 2^{2023}} < \left(k\cdot 2^{2023}\right)^{2^{2023}} < 128^{k\cdot 2^{2023}} \,,$$

czyli

$$\left(64^k\right)^{2^{2023}} < \left(k\cdot 2^{2023}\right)^{2^{2023}} < \left(128^k\right)^{2^{2023}} \,,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$64^k < k\cdot 2^{2023} < 128^k \,,$$

$$2^{6k} < k\cdot 2^{2023} < 2^{7k} \,. \qquad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że nierówności ($\clubsuit$) są prawdziwe dla $k=300$, gdyż wówczas

$$\mathbf{2^{6k}} = 2^{1800} < 300\cdot 2^{2023} = \mathbf{k\cdot 2^{2023}} < 2^9\cdot 2^{2023} = 2^{2032} < 2^{2100} = \mathbf{2^{7k}} \,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=300\cdot 2^{2023}$.

Uwaga

Liczbę wymaganą w zadaniu otrzymamy także dla k spełniających nierówności

$$291 \leqslant k \leqslant 338 \,.$$

Zauważ, że wśród tych liczb nie ma potęgi dwójki!!!

[1] Mamy bowiem

$$k=2031>2030=7\cdot 290>7\cdot 2^8=7\cdot 2^{k-2023} \qquad \text{(dla } k=2031\text{)}$$

oraz

$$k=2032<2^{11}=4\cdot 2^9<6\cdot 2^9=6\cdot 2^{k-2023} \,. \qquad \text{(dla } k=2032\text{)}$$

[2] Skoro nie udało się rozwiązanie poprzez przedstawienie stron nierówności w postaci potęg dwójki, to próbujemy porównywać potęgi o tym samym wykładniku, a mianowicie wykładniku 2^{2023}.