

ANALIZA 1, KOŁOKWIUM nr **1**, **18.10.2023**, godz. 8:15–9:45
Wykład: J. Wróblewski
PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 1. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(3n+1)! \leq 8 \cdot 3^{3n-2} \cdot (n!)^3.$$

Zadanie 2. (10 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{(14/15)} \left(\frac{21}{20} \right)$ jest niewymierna.

Zadanie 3. (10 punktów)

Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x(x+24)$$

jest wymierna.

W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania (dowolnego stopnia, ale wystarczają pierwiastki kwadratowe).

W każdym z przykładów należy także podać wartość $\log_x(x+24)$.

Zadanie 4. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\varphi^{199} \cdot n \leq \varphi^n + \varphi^{210},$$

gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest złotą liczbą. W rozwiązaniu można bez dowodu skorzystać z równości $1+\varphi = \varphi^2$ oraz z nierówności $\varphi^{11} > 199$.