# KOLOKWIUM nr 1, 18.10.2023, godz. 8:15–9:45

*Zadanie* **1. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$ zachodzi nierówność

$$(3n+1)! \leqslant 8 \cdot 3^{3n-2} \cdot (n!)^3 .$$

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

**1°** Dla $n=1$ mamy $L=4!=24$ oraz $P=8\cdot 3\cdot (1!)^3=24$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $24 \leqslant 24$, jest więc prawdziwa.

**2°** Niech teraz $n$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$(3n+1)! \leqslant 8 \cdot 3^{3n-2} \cdot (n!)^3 .$$

Chcemy wykazać, że

$$(3n+4)! \leqslant 8 \cdot 3^{3n+1} \cdot ((n+1)!)^3 .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$L=(3n+4)!=(3n+1)!\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)\leqslant 8\cdot 3^{3n-2}\cdot(n!)^3\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)=$$

$$=8\cdot 3^{3n+1}\cdot((n+1)!)^3\cdot\frac{(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)}{27\cdot(n+1)^3}\leqslant 8\cdot 3^{3n+1}\cdot((n+1)!)^3=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)}{27\cdot(n+1)^3}\leqslant 1\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(3n+2)\cdot(3n+4)\leqslant 9\cdot(n+1)^2\,,$$

$$9n^2+18n+8\leqslant 9n^2+18n+9\,,$$

$$0\leqslant 1\,,$$

a to jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej $n$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n$.

*Zadanie* **2. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{(14/15)}\left(\frac{21}{20}\right)$ jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(14/15)}\left(\frac{21}{20}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie $m$, $n$ są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(14/15)}\left(\frac{21}{20}\right) = -\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{14}{15}\right)^{-m/n} = \frac{21}{20}\,,$$

$$\left(\frac{14}{15}\right)^{-m} = \left(\frac{21}{20}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{15}{14}\right)^{m} = \left(\frac{21}{20}\right)^{n}\,,$$

$$15^m \cdot 20^n = 21^n \cdot 14^m\,.$$

Ponieważ jednak lewa strona powyższego równania jest podzielna przez 5, a prawa nie jest podzielna przez 5, równanie to nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych $m$, $n$.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(14/15)}\left(\frac{21}{20}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(14/15)}\left(\frac{21}{20}\right)$ jest niewymierna.

*Zadanie* **3.** **(10 punktów)**

Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x(x+24)$$

jest wymierna.

W podanych przykładach liczbę $x$ należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania (dowolnego stopnia, ale wystarczą pierwiastki kwadratowe).

W każdym z przykładów należy także podać wartość $\log_x(x+24)$.

*Rozwiązanie:*

*Przykład I:*

Dla $x=3$ liczba

$$\log_x(x+24)=\log_3 27=3$$

jest liczbą wymierną.

*Przykład II:*

Dla $x=8$ liczba

$$\log_x(x+24)=\log_8 32=\frac{5}{3}$$

jest liczbą wymierną.

*Przykład III:*

Zakładając, że

$$\log_x(x+24)=w\,,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w=x+24\,. \tag{\#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną $w$, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2=x+24\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[1] otrzymując

$$x=\frac{1\pm\sqrt{97}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x=\frac{1+\sqrt{97}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+24)=\log_x x^2=2$$

jest liczbą wymierną.

[1]Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

*Przykład IV:*

Postępujemy jak w przykładzie III przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania
$$x^{-1}=x+24$$
mającego rozwiązanie dodatnie
$$x=\sqrt{145}-12\,.$$
Wówczas
$$\log_x(x+24)=\log_x x^{-1}=-1$$
jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości
$$\log_{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=-1\,.$$
podstawiamy $n=144$, skąd otrzymujemy $x=\sqrt{145}-12$.

*Zadanie* **4. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$ zachodzi nierówność

$$\varphi^{199}\cdot n<\varphi^{n}+\varphi^{210},$$

gdzie $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest złotą liczbą. W rozwiązaniu można bez dowodu skorzystać z równości $1+\varphi=\varphi^2$ oraz z nierówności $\varphi^{11}>199$.

*Rozwiązanie:*

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki[2].

**Przypadek pierwszy:** $n\leqslant 199$.

Dla $n\leqslant 199$ zachodzą nierówności

$$\varphi^{199}\cdot n\leqslant\varphi^{199}\cdot 199<\varphi^{199}\cdot\varphi^{11}=\varphi^{210}<\varphi^{n}+\varphi^{210},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

**Przypadek drugi:** $n\geqslant 200$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

**1°** Dla $n=200$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=\varphi^{199}\cdot 200=\varphi^{199}\cdot 199+\varphi^{199}<\varphi^{199}\cdot\varphi^{11}+\varphi^{199}=\varphi^{210}+\varphi^{199},$$

$$P=\varphi^{200}+\varphi^{210},$$

skąd $L<P$.

**2°** Niech $n\geqslant 200$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\varphi^{199}\cdot n<\varphi^{n}+\varphi^{210}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$\varphi^{199}\cdot(n+1)<\varphi^{n+1}+\varphi^{210}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 200$, czyli $199\leqslant n-1$, otrzymujemy[3]

$$L=\varphi^{199}\cdot(n+1)=\varphi^{199}\cdot n+\varphi^{199}<\varphi^{n}+\varphi^{210}+\varphi^{199}\leqslant\varphi^{n}+\varphi^{210}+\varphi^{n-1}=$$

[2]W rozwiąznia przedstawiona jest uporządkowana redakcja rozwiązania. W praktyce możemy nie być w stanie przewidzieć jak rozdzielić rozwiązanie na przypadki. Wówczas zaczynamy komponowanie rozwiąznia od drugiego kroku indukcyjnego, który wymaga nierówności

$$\varphi^{199}\leqslant\varphi^{n-1},$$

czyli $199\leqslant n-1$ i w konsekwencji dowód indukcyjny przeprowadzamy dla $n\geqslant 200$.

[3]W międzyczasie korzystamy też z równości

$$\varphi^{n-1}+\varphi^{n}=\varphi^{n+1},$$

która wynika z równości

$$1+\varphi=\varphi^2$$

po przemnożeniu stronami przez $\varphi^{n-1}$.

$$=\varphi^{n-1}+\varphi^{n}+\varphi^{210}=\varphi^{n+1}+\varphi^{210}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.