

Egzamin

Wersja testu **S** 13 lutego 2024 r.

1. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{\log_7 \log_3 \log_4 x}$, $D_f = [64, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_6 \log_2 x}$, $D_f = [64, \infty)$

c) $f(x) = \sqrt{\log_9 \log_2 \log_8 x}$, $D_f = [64, \infty)$

d) $f(x) = \sqrt{\log_8 \log_2 \log_6 x}$, $D_f = [36, \infty)$

2. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^4} \leq 81^{n^4} \right\} = \sqrt[4]{4} = \boxed{\sqrt{2} \text{ +1 punkt}}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 7^{m^2} \leq 49^{n^2} \right\} = \sqrt{2}$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{m^3} \leq 25^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_4 25} = \boxed{\sqrt[3]{\log_2 5} \text{ +1 punkt}}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_8 27} = \boxed{\sqrt{\log_2 3} \text{ +1 punkt}}$

3. Podaj wartość granicy ciągu.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 7n} - 3n) = 7/6$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n) = 5/4$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) = 3/2$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25n^2 + 9n} - 5n) = 9/10$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x^{11}) = \frac{11x^{10}}{x^{22} + 1}$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \ln(x^6 + x^5 + 7) = \frac{6x^5 + 5x^4}{x^6 + x^5 + 7}$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x^7) = \frac{7x^6}{x^{14} + 1}$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \ln(x^7 + 5) = \frac{7x^6}{x^7 + 5}$$

5. Podaj wzór na pochodną funkcji.

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \sqrt{x^3 + 5} = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 5}}$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \sqrt{5x + 2} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5x + 2}}$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \sqrt[3]{7x + 3} = \frac{7}{3 \cdot (7x + 3)^{2/3}}$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x^4 + 7} = \frac{4x^3}{3 \cdot (x^4 + 7)^{2/3}}$$

6. Podaj sumę szeregu:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{64^n} = -1/65$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25^n} = 1/24$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{49^n} = 1/50$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{27^n} = -1/28$$

7. Podaj sumę szeregu:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^n} - 2^{2^{n+1}}) = -\infty$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (5^{5^n} - 5^{5^{n+1}}) = -\infty$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (4^{4^n} - 4^{4^{n+1}}) = -\infty$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (3^{3^n} - 3^{3^{n+1}}) = -\infty$$

8. Niech $f(x) = x^5 \cdot \ln(1+x^3)$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(17)}(0) = -17!/4$

b) $f^{(20)}(0) = 20!/5$

c) $f^{(14)}(0) = 14!/3$

d) $f^{(11)}(0) = -11!/2$

Egzamin

Wersja testu **S** 13 lutego 2024 r.

11. Podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{(x-9)^{2024} \cdot (x-16)^{2025} \cdot (x-25)^{2024}}$

$$D_f = \{9\} \cup [16, +\infty)$$

b) $f(x) = \sqrt{(x-9)^{2024} \cdot (x-16)^{2024} \cdot (x-25)^{2025}}$

$$D_f = \{9\} \cup \{16\} \cup [25, +\infty)$$

c) $f(x) = \sqrt{(x-9)^{2025} \cdot (x-16)^{2024} \cdot (x-25)^{2025}}$

$$D_f = (-\infty, 9] \cup \{16\} \cup [25, +\infty)$$

d) $f(x) = \sqrt{(x-9)^{2025} \cdot (x-16)^{2025} \cdot (x-25)^{2024}}$

$$D_f = (-\infty, 9] \cup [16, +\infty)$$

12. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{1}{10^n - 2024} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1/7976$

b) $\sup \left\{ \frac{1}{666 - 100n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1/66$

c) $\sup \left\{ \frac{1}{2024 - 10^n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1/1024$

d) $\sup \left\{ \frac{1}{100n - 666} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1/34$

13. Podaj kres dolny zbioru.

a) $\inf\{(x^2 - 2)^5 : x \in [-3, 2]\} = -32$

b) $\inf\{(x^2 - 2)^4 : x \in [-3, 2]\} = 0$

c) $\inf\{(x^2 - 2)^3 : x \in [-3, 2]\} = -8$

d) $\inf\{(x^2 - 2)^6 : x \in [-3, 2]\} = 0$

14. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{64} - \sqrt[n+3]{64}) = 73$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{64} - \sqrt[n+1]{64}) = 63$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{64} - \sqrt[n+2]{64}) = 70$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{64} - \sqrt[n+1]{64}) = 7$

15. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^3 + 1)^3} = -\frac{9x^2}{(x^3 + 1)^4}$

b) $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2 + 1} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

c) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{3x^3 + 1}} = -\frac{9x^2}{2 \cdot (3x^3 + 1)^{3/2}}$

d) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[3]{4x^4 + 1}} = -\frac{16x^3}{3 \cdot (4x^4 + 1)^{4/3}}$

16. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\operatorname{tg} x \text{ +1 punkt}}$

b) $\frac{d}{dx} \sin \sin x = \cos \sin x \cdot \cos x$

c) $\frac{d}{dx} e^{e^{x^2}} = e^{e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

d) $\frac{d}{dx} \ln \ln x = \frac{1}{x \cdot \ln x}$

17. Podaj wzór na pochodną trzeciego rzędu.

a) $\frac{d^3}{dx^3} \sqrt{x} = \frac{3}{8x^{5/2}}$

b) $\frac{d^3}{dx^3} \sqrt[5]{x} = \frac{36}{125x^{14/5}}$

c) $\frac{d^3}{dx^3} \sqrt[4]{x} = \frac{21}{64x^{11/4}}$

d) $\frac{d^3}{dx^3} \sqrt[3]{x} = \frac{10}{27x^{8/3}}$

18. Niech $f(x) = x^5 \cdot e^{x^3}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(17)}(0) = 17!/24$

b) $f^{(20)}(0) = 20!/120$

c) $f^{(14)}(0) = 14!/6$

d) $f^{(11)}(0) = 11!/2$