Egzamin, 13.02.2024, godz. 9:00–11:00

Zadanie **9 (10 punktów)**

Dowieść, że liczba

$$\log_{(9/10)}\left(\frac{100}{27}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(9/10)}\left(\frac{100}{27}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(9/10)}\left(\frac{100}{27}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{-m/n}=\frac{100}{27}\,,$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{-m}=\left(\frac{100}{27}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{m}=\left(\frac{100}{27}\right)^{n}\,,$$

$$10^m\cdot 27^n=100^n\cdot 9^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m\cdot 3^{3n}\cdot 5^m=2^{2n}\cdot 3^{2m}\cdot 5^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} m & = & 2n \\ 3n & = & 2m \\ m & = & 2n \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$3n=2m=4n\,,$$

co prowadzi do $n=0$, a to nie jest liczba dodatnia.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(9/10)}\left(\frac{100}{27}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(9/10)}\left(\frac{100}{27}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym występują złożone podstawy potęg lub wykładniki, o których nie wiadomo, czy są całkowite nieujemne.

Zadanie **10 (10 punktów)**

Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{20}{x}-\frac{50}{x^2}+\ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=-\frac{20}{x^2}+\frac{100}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{20}{x^2}+\frac{100}{x^3}=\frac{x^2-20x+100}{x^3}=\frac{(x-10)^2}{x^3}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Ponieważ $f(9)\approx 3{,}8022$ oraz $f(11)\approx 3{,}8029$, nie wydaje się możliwe porównanie tych wartości ręcznie poprzez bezpośrednie szacowanie. Dlatego zbadanie monotoniczności funkcji f należy uznać za jedyną drogę rozwiązania.

Egzamin, 13.02.2024, godz. 11:20–13:20

Zadanie **19 (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-20\cdot|x+5|$$

na przedziale $[-15,25]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x+5|=\begin{cases} x+5 & \text{dla} \quad x\in[-5,+\infty) \\ -x-5 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-5) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-20x-100 & \text{dla} \quad x\in[-5,25] \\ x^2+20x+100 & \text{dla} \quad x\in[-15,-5) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-15,25]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-20 & \text{dla} \quad x\in(-5,25) \\ 2x+20 & \text{dla} \quad x\in(-15,-5) \end{cases}$$

W punkcie -5 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-5,25)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x-20=0$, co ma rozwiązanie $x=10$, które należy do rozważanego przedziału $(-5,25)$.

2° W przypadku $x\in(-15,-5)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+20=0$, co ma rozwiązanie $x=-10$, które należy do rozważanego przedziału $(-15,-5)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -15 i 25,
- miejsca zerowe pochodnej: -10 i 10,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -5.

$$f(-15)=25\,,$$
$$f(-10)=0\,,$$
$$f(-5)=25\,,$$
$$f(10)=-200\,,$$
$$f(25)=5\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -200 w punkcie 10, a wartość największą równą 25 w punktach -15, -5 i 25.

Zadanie **20 (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,4)$ zachodzi nierówność

$$\log_2 x > \frac{x}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $f(x)=\log_2 x=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$ oraz $g(x)=\dfrac{x}{2}$. Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln 2}\,.$$

Zatem funkcja f' jest malejąca w przedziale $(0,\infty)$, skąd wynika, że funkcja f jest funkcją ściśle wklęsłą.

Ponieważ $f(2)=g(2)=1$ oraz $f(4)=g(4)=2$, prosta będąca wykresem funkcji liniowej g jest sieczną wykresu funkcji f wyznaczoną przez punkty odpowiadające $x=2$ i $x=4$. Odcinek tej prostej zawarty między tymi punktami jest więc cięciwą wykresu funkcji f, a skoro f jest ściśle wklęsła, to leży on poniżej wykresu.

Zatem $f(x)>g(x)$ dla $x\in(2,4)$, co należało udowodnić.