

Egzamin część II

Wersja testu **A** 31 stycznia 2024 r.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = \dots\dots\dots$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^2} \leq 16^{n^2} \right\} = \dots\dots\dots$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\} = \dots\dots\dots$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\} = \dots\dots\dots$

2. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(32, 50) = \dots\dots\dots$ b) $G(25, 36) = \dots\dots\dots$

c) $G(16, 25) = \dots\dots\dots$ d) $G(9, 16) = \dots\dots\dots$

3. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_4'(2) = \dots\dots\dots$ b) $f_4'(1) = \dots\dots\dots$

c) $f_5'(2) = \dots\dots\dots$ d) $f_5'(1) = \dots\dots\dots$

4. Niech $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_3'(2) = \dots\dots\dots$ b) $f_2'(1) = \dots\dots\dots$

c) $f_2'(2) = \dots\dots\dots$ d) $f_3'(1) = \dots\dots\dots$

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f'(1) = \dots\dots\dots$ b) $f'''(1) = \dots\dots\dots$

c) $f''(1) = \dots\dots\dots$ d) $f^{(4)}(1) = \dots\dots\dots$

6. Niech $f(x) = x^{37} \cdot e^{x^{10}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(997)}(0) = \dots\dots\dots$ b) $f^{(777)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(337)}(0) = \dots\dots\dots$ d) $f^{(557)}(0) = \dots\dots\dots$

7. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}) = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5}) = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = \dots\dots\dots$

8. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{99^n} = \dots\dots\dots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{77^n} = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{55^n} = \dots\dots\dots$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{33^n} = \dots\dots\dots$

9. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^5 + x + 16$. Podaj wartość pochodnej.

- a) $g'(50) = \dots\dots\dots$ b) $g'(16) = \dots\dots\dots$
 c) $g'(14) = \dots\dots\dots$ d) $g'(18) = \dots\dots\dots$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Podaj wartość pochodnej.

- a) $g'(134) = \dots\dots\dots$ b) $g'(70) = \dots\dots\dots$
 c) $g'(8) = \dots\dots\dots$ d) $g'(30) = \dots\dots\dots$

11. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta określona równaniem $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, \sqrt{k}) do krzywej zdefiniowanej równaniem $y = \sqrt{x}$. Wówczas:

- a) $a_{16} = \dots\dots\dots$ $b_{16} = \dots\dots\dots$ b) $a_1 = \dots\dots\dots$ $b_1 = \dots\dots\dots$
 c) $a_4 = \dots\dots\dots$ $b_4 = \dots\dots\dots$ d) $a_9 = \dots\dots\dots$ $b_9 = \dots\dots\dots$

12. Niech

$$G(k) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1 - kx - \frac{k^2 x^2}{2}}{x^3}.$$

Wówczas:

- a) $G(3) = \dots\dots\dots$ b) $G(4) = \dots\dots\dots$
 c) $G(5) = \dots\dots\dots$ d) $G(2) = \dots\dots\dots$