

Egzamin część II

Wersja testu **A** 31 stycznia 2024 r.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_{16} 81} = \boxed{\sqrt{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^2} \leq 16^{n^2} \right\} = 2$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\} = \sqrt{5/3}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_3 5}$

2. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(32, 50) = 1/80$

b) $G(25, 36) = 1/60$

c) $G(16, 25) = 1/40$

d) $G(9, 16) = 1/24$

3. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_4'(2) = 8/5 \left(= 1\frac{3}{5} \right)$

b) $f_4'(1) = 4/5$

c) $f_5'(2) = 80/37 \left(= 2\frac{6}{37} \right)$

d) $f_5'(1) = 5/6$

4. Niech $f_n(x) = \arctg(x^n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_3'(2) = 12/65$

b) $f_2'(1) = 1$

c) $f_2'(2) = 4/17$

d) $f_3'(1) = 3/2 \left(= 1\frac{1}{2} \right)$

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f'(1) = 1/3$

b) $f'''(1) = 10/27$

c) $f''(1) = -2/9$

d) $f^{(4)}(1) = -80/81$

6. Niech $f(x) = x^{37} \cdot e^{x^{10}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(997)}(0) = 997!/96!$

b) $f^{(777)}(0) = 777!/74!$

c) $f^{(337)}(0) = 337!/30!$

d) $f^{(557)}(0) = 557!/52!$

7. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}) = 2$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5}) = 4$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \right) = 4 - e$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

8. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{99^n} = -1/100$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{77^n} = 1/78$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{55^n} = -1/56$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{33^n} = 1/32$

9. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^5 + x + 16$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(50) = 1/81$

b) $g'(16) = 1$

c) $g'(14) = 1/6$

d) $g'(18) = 1/6$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(134) = 1/78$

b) $g'(70) = 1/51$

c) $g'(8) = 1/15$

d) $g'(30) = 1/30$

11. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta określona równaniem $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, \sqrt{k}) do krzywej zdefiniowanej równaniem $y = \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_{16} = 1/8$ $b_{16} = 2$

b) $a_1 = 1/2$ $b_1 = 1/2$

c) $a_4 = 1/4$ $b_4 = 1$

d) $a_9 = 1/6$ $b_9 = 3/2$

12. Niech

$$G(k) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1 - kx - \frac{k^2 x^2}{2}}{x^3}.$$

Wówczas:

a) $G(3) = 9/2$ ($= 4\frac{1}{2}$)

b) $G(4) = 32/3$ ($= 10\frac{2}{3}$)

c) $G(5) = 125/6$ ($= 20\frac{5}{6}$)

d) $G(2) = 4/3$ ($= 1\frac{1}{3}$)

Egzamin część II

Wersja testu **B** 31 stycznia 2024 r.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\} = \sqrt{5/3}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^2} \leq 16^{n^2} \right\} = 2$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_{16} 81} = \boxed{\sqrt{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_3 5}$

2. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(9, 16) = 1/24$

b) $G(16, 25) = 1/40$

c) $G(32, 50) = 1/80$

d) $G(25, 36) = 1/60$

3. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f'_5(2) = 80/37 \left(= 2\frac{6}{37} \right)$

b) $f'_4(2) = 8/5 \left(= 1\frac{3}{5} \right)$

c) $f'_4(1) = 4/5$

d) $f'_5(1) = 5/6$

4. Niech $f_n(x) = \arctg(x^n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f'_3(2) = 12/65$

b) $f'_3(1) = 3/2 \left(= 1\frac{1}{2} \right)$

c) $f'_2(2) = 4/17$

d) $f'_2(1) = 1$

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(4)}(1) = -80/81$

b) $f'''(1) = 10/27$

c) $f''(1) = -2/9$

d) $f'(1) = 1/3$

6. Niech $f(x) = x^{37} \cdot e^{x^{10}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(777)}(0) = 777!/74!$

b) $f^{(557)}(0) = 557!/52!$

c) $f^{(997)}(0) = 997!/96!$

d) $f^{(337)}(0) = 337!/30!$

7. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}) = 2$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5}) = 4$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \right) = 4 - e$

8. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{33^n} = 1/32$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{77^n} = 1/78$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{55^n} = -1/56$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{99^n} = -1/100$

9. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^5 + x + 16$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(16) = \mathbf{1}$ b) $g'(18) = \mathbf{1/6}$

c) $g'(14) = \mathbf{1/6}$ d) $g'(50) = \mathbf{1/81}$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(30) = \mathbf{1/30}$ b) $g'(134) = \mathbf{1/78}$

c) $g'(70) = \mathbf{1/51}$ d) $g'(8) = \mathbf{1/15}$

11. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta określona równaniem $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, \sqrt{k}) do krzywej zdefiniowanej równaniem $y = \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_9 = \mathbf{1/6}$ $b_9 = \mathbf{3/2}$ b) $a_{16} = \mathbf{1/8}$ $b_{16} = \mathbf{2}$

c) $a_4 = \mathbf{1/4}$ $b_4 = \mathbf{1}$ d) $a_1 = \mathbf{1/2}$ $b_1 = \mathbf{1/2}$

12. Niech

$$G(k) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1 - kx - \frac{k^2 x^2}{2}}{x^3}.$$

Wówczas:

a) $G(3) = \mathbf{9/2}$ $(= \mathbf{4\frac{1}{2}})$ b) $G(4) = \mathbf{32/3}$ $(= \mathbf{10\frac{2}{3}})$

c) $G(2) = \mathbf{4/3}$ $(= \mathbf{1\frac{1}{3}})$ d) $G(5) = \mathbf{125/6}$ $(= \mathbf{20\frac{5}{6}})$

Egzamin część II

Wersja testu **C** 31 stycznia 2024 r.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\} = \sqrt{5/3}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_{16} 81} = \boxed{\sqrt{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_3 5}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^2} \leq 16^{n^2} \right\} = 2$

2. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(32, 50) = 1/80$

b) $G(16, 25) = 1/40$

c) $G(9, 16) = 1/24$

d) $G(25, 36) = 1/60$

3. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_4'(1) = 4/5$

b) $f_4'(2) = 8/5 \left(= 1\frac{3}{5} \right)$

c) $f_5'(2) = 80/37 \left(= 2\frac{6}{37} \right)$

d) $f_5'(1) = 5/6$

4. Niech $f_n(x) = \arctg(x^n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_3'(2) = 12/65$

b) $f_2'(2) = 4/17$

c) $f_3'(1) = 3/2 \left(= 1\frac{1}{2} \right)$

d) $f_2'(1) = 1$

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f''(1) = -2/9$

b) $f'(1) = 1/3$

c) $f^{(4)}(1) = -80/81$

d) $f'''(1) = 10/27$

6. Niech $f(x) = x^{37} \cdot e^{x^{10}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(777)}(0) = 777!/74!$

b) $f^{(557)}(0) = 557!/52!$

c) $f^{(997)}(0) = 997!/96!$

d) $f^{(337)}(0) = 337!/30!$

7. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5}) = 4$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}) = 2$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \right) = 4 - e$

8. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{99^n} = -1/100$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{77^n} = 1/78$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{55^n} = -1/56$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{33^n} = 1/32$

9. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^5 + x + 16$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(16) = 1$

b) $g'(50) = 1/81$

c) $g'(14) = 1/6$

d) $g'(18) = 1/6$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(8) = 1/15$

b) $g'(134) = 1/78$

c) $g'(70) = 1/51$

d) $g'(30) = 1/30$

11. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta określona równaniem $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, \sqrt{k}) do krzywej zdefiniowanej równaniem $y = \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_{16} = 1/8$ $b_{16} = 2$

b) $a_4 = 1/4$ $b_4 = 1$

c) $a_1 = 1/2$ $b_1 = 1/2$

d) $a_9 = 1/6$ $b_9 = 3/2$

12. Niech

$$G(k) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1 - kx - \frac{k^2 x^2}{2}}{x^3}.$$

Wówczas:

a) $G(4) = 32/3$ ($= 10\frac{2}{3}$)

b) $G(5) = 125/6$ ($= 20\frac{5}{6}$)

c) $G(2) = 4/3$ ($= 1\frac{1}{3}$)

d) $G(3) = 9/2$ ($= 4\frac{1}{2}$)

Egzamin część II

Wersja testu **D** 31 stycznia 2024 r.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_{16} 81} = \boxed{\sqrt{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 5^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_3 5}$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^2} \leq 16^{n^2} \right\} = 2$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\} = \sqrt{5/3}$

2. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(32, 50) = 1/80$

b) $G(9, 16) = 1/24$

c) $G(25, 36) = 1/60$

d) $G(16, 25) = 1/40$

3. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f'_5(2) = 80/37 \left(= 2\frac{6}{37} \right)$

b) $f'_4(2) = 8/5 \left(= 1\frac{3}{5} \right)$

c) $f'_5(1) = 5/6$

d) $f'_4(1) = 4/5$

4. Niech $f_n(x) = \arctg(x^n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f'_3(2) = 12/65$

b) $f'_3(1) = 3/2 \left(= 1\frac{1}{2} \right)$

c) $f'_2(1) = 1$

d) $f'_2(2) = 4/17$

5. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f''(1) = -2/9$

b) $f'(1) = 1/3$

c) $f'''(1) = 10/27$

d) $f^{(4)}(1) = -80/81$

6. Niech $f(x) = x^{37} \cdot e^{x^{10}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(777)}(0) = 777!/74!$

b) $f^{(557)}(0) = 557!/52!$

c) $f^{(997)}(0) = 997!/96!$

d) $f^{(337)}(0) = 337!/30!$

7. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \right) = 4 - e$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5} \right) = 4$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3} \right) = 2$

8. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{99^n} = -1/100$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{77^n} = 1/78$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{55^n} = -1/56$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{33^n} = 1/32$

9. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^5 + x + 16$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(50) = 1/81$ b) $g'(14) = 1/6$

c) $g'(16) = 1$ d) $g'(18) = 1/6$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(30) = 1/30$ b) $g'(8) = 1/15$

c) $g'(134) = 1/78$ d) $g'(70) = 1/51$

11. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta określona równaniem $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, \sqrt{k}) do krzywej zdefiniowanej równaniem $y = \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_{16} = 1/8$ $b_{16} = 2$ b) $a_9 = 1/6$ $b_9 = 3/2$

c) $a_1 = 1/2$ $b_1 = 1/2$ d) $a_4 = 1/4$ $b_4 = 1$

12. Niech

$$G(k) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1 - kx - \frac{k^2 x^2}{2}}{x^3}.$$

Wówczas:

a) $G(5) = 125/6$ $(= 20\frac{5}{6})$ b) $G(4) = 32/3$ $(= 10\frac{2}{3})$

c) $G(3) = 9/2$ $(= 4\frac{1}{2})$ d) $G(2) = 4/3$ $(= 1\frac{1}{3})$