Egzamin, 31.01.2024, godz. 9:00–11:00

Zadanie **1** **(10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\varphi^{521}\cdot n<\varphi^{n}+\varphi^{534}\,,$$

gdzie $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest złotą liczbą. W rozwiązaniu można bez dowodu skorzystać z równości $1+\varphi=\varphi^2$ oraz z nierówności $\varphi^{13}>521$.

Zadanie **2** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+1)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+3}+\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+1)^2+k}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-8}}{(n+B)^2+4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2+5}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2+6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2+7}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2+8}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

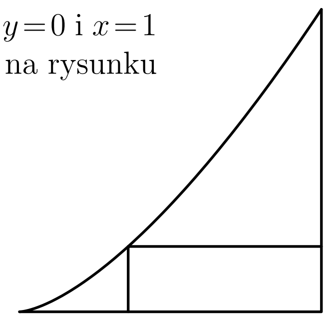
Zadanie **3** **(10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie takie **zbieżne** szeregi geometryczne $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}=2\,.$$

Zadanie **4** **(10 punktów)**

W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x\cdot\sqrt{x}$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Zadanie **5** **(10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(5e^{7x}+7e^{5x}+2024\right)\,.$$

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 7\cdot|x-y|\,.$$

Zadanie **6 (10 punktów)**

Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+e^x-2\sin x+ax^3$$

miała w zerze (lokalne) ekstremum. Jakie to ekstremum (minimum czy maksimum)?

Zadanie **7 (ZADANIE DODATKOWE)**

Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(3,\,5)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[7]{x^3+3}<\frac{x+7}{6}\,.$$

Zadanie **8 (ZADANIE DODATKOWE)**

Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{(x-y)^2+1}\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.