Egzamin, 31.01.2024, godz. 9:00–11:00

Zadanie **1** **(10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\varphi^{521}\cdot n<\varphi^{n}+\varphi^{534},$$

gdzie $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest złotą liczbą. W rozwiązaniu można bez dowodu skorzystać z równości $1+\varphi=\varphi^{2}$ oraz z nierówności $\varphi^{13}>521$.

Rozwiązanie:
Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki[1].

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 521$.

Dla $n\leqslant 521$ zachodzą nierówności

$$\varphi^{521}\cdot n\leqslant\varphi^{521}\cdot 521<\varphi^{521}\cdot\varphi^{13}=\varphi^{534}<\varphi^{n}+\varphi^{534},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 522$.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=522$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=\varphi^{521}\cdot 522=\varphi^{521}\cdot 521+\varphi^{521}<\varphi^{521}\cdot\varphi^{13}+\varphi^{521}=\varphi^{534}+\varphi^{521},$$

$$P=\varphi^{522}+\varphi^{534},$$

skąd $L<P$.

2° Niech $n\geqslant 522$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\varphi^{521}\cdot n<\varphi^{n}+\varphi^{534}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$\varphi^{521}\cdot(n+1)<\varphi^{n+1}+\varphi^{534}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 522$, czyli $521\leqslant n-1$, otrzymujemy[2]

$$L=\varphi^{521}\cdot(n+1)=\varphi^{521}\cdot n+\varphi^{521}<\varphi^{n}+\varphi^{534}+\varphi^{521}\leqslant\varphi^{n}+\varphi^{534}+\varphi^{n-1}=$$

[1] W rozwiąznaniu przedstawiona jest uporządkowana redakcja rozwiązania. W praktyce możemy nie być w stanie przewidzieć jak rozdzielić rozwiązanie na przypadki. Wówczas zaczynamy komponowanie rozwiąznia od drugiego kroku indukcyjnego, który wymaga nierówności

$$\varphi^{521}\leqslant\varphi^{n-1},$$

czyli $521\leqslant n-1$ i w konsekwencji dowód indukcyjny przeprowadzamy dla $n\geqslant 522$.

[2] W międzyczasie korzystamy też z równości

$$\varphi^{n-1}+\varphi^{n}=\varphi^{n+1},$$

która wynika z równości

$$1+\varphi=\varphi^{2}$$

po przemnożeniu stronami przez φ^{n-1}.

$$=\varphi^{n-1}+\varphi^{n}+\varphi^{534}=\varphi^{n+1}+\varphi^{534}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **2 (10 punktów)**

Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+1)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+3}+\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+1)^2+k}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-8}}{(n+B)^2+4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2+5}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2+6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2+7}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2+8}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2+8}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2+8}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot\frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+2n+1+(2(B-1)n+B^2+7)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+1)^2+k}\,, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{2}=2(B-1)n+B^2+7\,, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2An+A^2=2\cdot\Big(2(B-1)n+B^2+7\Big)\,,$$
$$2An+A^2=4(B-1)n+2\cdot\Big(B^2+7\Big)\,. \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A &= 4(B-1)\\ A^2 &= 2(B^2+7)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A &= 2(B-1)\\ A^2 &= 2B^2+14\end{cases}$$

Po podstawieniu A z pierwszego równania do równania drugiego otrzymujemy kolejno

$$4(B-1)^2=2B^2+14\,,$$
$$4B^2-8B+4=2B^2+14\,,$$
$$2B^2-8B-10=0\,,$$
$$B^2-4B-5=0\,,$$

skąd[3] $B=5$ i $A=8$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=8n+32\,.$$

[3]Rozwiązanie $B=-1$ odrzucamy ze względu na nierówność $B>1$.

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $8n+33$ składniki.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2+8} \leqslant \sum_{k=0}^{8n+32}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+1)^2+k} \leqslant (8n+33)\cdot\frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2+8}=\frac{(8n+33)\cdot n}{(n+5)^2+8}=\frac{8+\frac{33}{n}}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2+\frac{8}{n^2}}\to 8$$

oraz

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+1)^2}=\frac{(8n+33)\cdot(n+8)}{(n+1)^2}=\frac{\left(8+\frac{33}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{8}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\to 8\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 8.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=8$, $B=5$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 8.

Zadanie **3 (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie takie **zbieżne** szeregi geometryczne $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} = 2\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ szukamy zbieżnego szeregu geometrycznego o wyrazach dodatnich, przyjmijmy $a_n = a_1 q^{n-1}$, pamiętając, aby $a_1 > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \sqrt{q} \cdot q^{n-1} = \frac{a_1\sqrt{q}}{1-q}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = 3 \\ \dfrac{a_1\sqrt{q}}{1-q} = 2\,, \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$\sqrt{q} = \frac{2}{3} \qquad \text{czyli} \qquad q = \frac{4}{9}\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$\frac{a_1}{5/9} = 3\,,$$

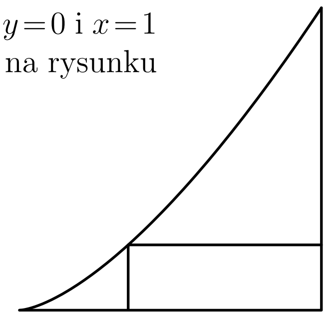
$$a_1 = \frac{5}{3}\,.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{3 \cdot 9^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{2n-2}}{3^{2n-1}}\,.$$

Zadanie **4 (10 punktów)**

W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x\cdot\sqrt{x}$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:
Niech $\left(a,\,a^{3/2}\right)$, gdzie $a\in(0,1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot a^{3/2}=a^{3/2}-a^{5/2}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to 1^-}P(a)=0\,, \qquad (*****)$$

a ponadto

$$P'(a)=\frac{3}{2}\cdot a^{1/2}-\frac{5}{2}\cdot a^{3/2}=(3-5a)\cdot a^{1/2}\,.$$

Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=3/5$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}=\frac{6\cdot\sqrt{3}}{25\cdot\sqrt{5}}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $\dfrac{6\cdot\sqrt{3}}{25\cdot\sqrt{5}}$.

(*****) Brak świadomości konieczności sprawdzenia, co się dzieje z wartościami funkcji na końcu przedziału, świadczy o niezrozumieniu procedury wyznacznia największej wartości funkcji na przedziale. **W takiej sytuacji odejmowane bądą 4 punkty.** Oczywiście sprawdzenie na końcach nie jest konieczne, jeśli zostanie zastąpione innym rozumowaniem pokazującym, że w miejscu zerowania się pochodnej jest osiągana największa wartość funkcji (np. sprawdzenie monotoniczności funkcji na podstawie znaku pochodnej).

Zadanie **5** **(10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(5e^{7x}+7e^{5x}+2024\right) .$$

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 7\cdot|x-y| .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y| ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 7 ,$$

czyli

$$\frac{35e^{7x}+35e^{5x}}{5e^{7x}+7e^{5x}+2024}\leqslant 7 . \qquad (\spadesuit)$$

Nierówność $(\spadesuit)$ jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$35e^{7x}+35e^{5x}\leqslant 35e^{7x}+49e^{5x}+2024\cdot 7 ,$$

$$0\leqslant 14e^{5x}+2024\cdot 7 ,$$

a to jest prawdziwe, gdyż dla każdej liczby rzeczywistej x prawa strona jest dodatnia.

Zadanie **6** **(10 punktów)**

Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+e^x-2\sin x+ax^3$$

miała w zerze (lokalne) ekstremum. Jakie to ekstremum (minimum czy maksimum)?

Rozwiązanie:

Obliczamy kolejne pochodne funkcji f w zerze:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+e^x-2\cos x+3ax^2, \qquad f'(0)=0\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+e^x+2\sin x+6ax, \qquad f''(0)=0\,,$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}+e^x+2\cos x+6a, \qquad f'''(0)=5+6a\,.$$

Jeżeli pierwsza niezerowa pochodna ma rząd nieparzysty, to funkcja nie ma ekstremum, musi więc być $5+6a=0$, czyli $a=-5/6$.

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}+e^x-2\sin x, \qquad f^{(4)}(0)=-5<0\,.$$

Ponieważ pierwsza niezerowa pochodna ma rząd parzysty, to funkcja ma ekstremum. Skoro ta pochodna jest ujemna, to jest to maksimum.

Odpowiedź: Funkcja f ma ekstremum w zerze dla $a=-5/6$ i jest to maksimum.

Zadanie **7 (ZADANIE DODATKOWE)**

Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(3,\,5)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[7]{x^3+3}<\frac{x+7}{6}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy

$$f(x)=\sqrt[7]{x^3+3}\,.$$

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{3x^2}{7\cdot\left(x^3+3\right)^{6/7}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{6x}{7\cdot\left(x^3+3\right)^{6/7}}-\frac{54x^4}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=\frac{42x\cdot\left(x^3+3\right)}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}-\frac{54x^4}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=$$
$$\frac{42x^4+126x-54x^4}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=\frac{-12x^4+126x}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}=\frac{6x\cdot\left(-2x^3+21\right)}{49\cdot\left(x^3+3\right)^{13/7}}<0$$

dla $x>\sqrt[3]{\dfrac{21}{2}}<3$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{\dfrac{21}{2}},\,\infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział $(3,\,5)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x\in(3,5)$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 5. Ponieważ $f(5)=2$ oraz $f'(5)=\dfrac{75}{448}>\dfrac{75}{450}=\dfrac{1}{6}$, dla $x\in(3,\,5)$ zachodzą nierówności[4]

$$\sqrt[7]{x^3+3}=f(x)<f(5)+(x-5)\cdot f'(5)=2+(x-5)\cdot\frac{75}{448}<2+(x-5)\cdot\frac{1}{6}=\frac{12+(x-5)}{6}=\frac{x+7}{6}\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

[4]Po drodze należy uwzględnić, że liczba $x-5$ jest ujemna.

Zadanie **8 (ZADANIE DODATKOWE)**

Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{(x-y)^2+1}\,.$$
Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste $x<y$. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy $z_n=y+n$.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f oraz nierówności trójkąta otrzymujemy
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(z_n)|+|f(z_n)-f(y)|\leqslant\frac{1}{(x-z_n)^2+1}+\frac{1}{(z_n-y)^2+1}<$$
$$<\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}=\frac{2}{n^2+1}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{2}{n^2+1}$$
prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.