Ciągi liczbowe. Granica.

Ciąg liczbowy wyobrażamy sobie jako ustawione po kolei liczby[1]:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots \qquad (\diamondsuit)$$

Liczby te nazywamy wyrazami ciągu, przy czym liczbę stojącą na n-tej pozycji[2] nazywamy n-tym wyrazem ciągu.

Z formalnego punktu widzenia definiujemy ciąg liczbowy jako funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych[3] i przyjmującą wartości będące liczbami rzeczywistymi. Jeżeli nazwać tę funkcję a, czyli przyjąć, że $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, to n-ty wyraz ciągu będący wartością funkcji a dla argumentu n należałoby oznaczyć przez $a(n)$. Jednak w kontekście ciągu używamy wygodniejszego oznaczenia a_n. Co więcej, na ogół nie mówimy o ciągu a, rezerwując sobie literkę a do ewentualnego oznaczania innych obiektów matematycznych mniej lub bardziej związanych z samym ciągiem. A także rezerwujemy sobie oznaczenia typu a_0 do oznaczenia różnych obiektów matematycznych, chociaż formalista zazgrzytałby zębami, że przecież a_0 powinno oznaczać wyraz ciągu stojący na pozycji zerowej.

Pamiętajmy, że a_n oznacza n-ty wyraz ciagu, czyli pewną liczbę rzeczywistą. Jeżeli natomiast będziemy chcieli odnieść się do ciągu $(\diamondsuit)$, użyjemy oznaczenia (a_n), które należy rozumieć jako skrót jednej z następujących pełnych wersji[4]:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad (a_n : n\in\mathbb{N})$$

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na rozróżnienie napisów z nawiasami "( )" od napisów z nawiasami "{ }". Nawiasów "{ }" używamy do oznaczenia zbiorów. Mówiąc obrazowo, zbiory nie pamiętają kolejności swoich elementów, ani też nie ma czegoś takiego jak wielokrotne należenie elementu do zbioru. Potencjalny element może do zbioru należeć albo nie — trzeciej opcji nie ma. Tak więc poniższe napisy oznaczają ten sam zbiór:

$$\{1,2\}=\{2,1\}=\{1,1,2,1\}=\{1+1,1\cdot 1,1^1\}\,.$$

Natomiast nawiasy "( )" służą do oznaczenia uporządkowanych układów[5] liczb[6] lub też do oznaczenia funkcji. Tak więc kolejność elementów pary uporządkowanej ma znaczenie, np.:

$$(1,2)\neq(2,1)\,.$$

A funkcję $f:D_f\to\mathbb{R}$ możemy zapisać jako

$$f=(f(x): x\in D_f)\,.$$

W konsekwencji napis $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ nie oznacza ciągu liczbowego, ale zbiór wyrazów ciągu (a_n), czyli wyrazy ciągu z utraconą informacją co do kolejności i krotności ich występowania. Niestety wśród niektórych autorów podręczników dość rozpowszechniony jest zwyczaj pisania: "ciąg $\{a_n\}$". Odnoście się do tych Autorów z należnym Im szacunkiem, ale przykładu z Nich nie bierzcie.

[1] Liczb tych jest nieskończenie wiele.
[2] W powyższym przykładzie jest to a_n.
[3] Czyli, powtarzam do znudzenia, całkowitych dodatnich.
[4] Wersji tych użyjemy, gdy skrócony zapis mógłby prowadzić do nieporozumień.
[5] Na przykład par uporządkowanych, trójek uporządkowanych.
[6] Bądź innych obiektów matematycznych.

Możemy więc użyć napisu $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dla oznaczenia ciągu kwadratów liczb naturalnych: 1, 4, 9, 16, ...

Przyjrzyjmy się różnym przykładom ciągów liczbowych:

$$a_n=\frac{n}{2n+1}$$
$$b_n=(-1)^n$$
$$c_n=n^n$$
$$d_n=(-1)^n\cdot n!$$
$$e_n=\sqrt{n^2+n}-n$$
$$f_n=\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$$
$$g_n=\sqrt[4]{n^4+n^3}-n$$
$$h_n=\sqrt[n]{n}$$

Zastanówmy się, jak wyglądają wyrazy tych ciągów stojące na bardzo dalekich pozycjach. W niektórych przypadkach można na to odpowiedzieć od razu, a w niektórych trzeba się wspomóc odpowiednimi przekształceniami lub oszacowaniami. I tak:

$$a_n=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(2n+1)}\,,$$

co dla bardzo dużego n jest równe $1/2$ minus bardzo mała liczba dodatnia. Zatem dla bardzo dużych n mamy $a_n\approx 1/2$. Możemy więc powiedzieć, że dalekie wyrazy ciągu (a_n) są prawie równe $1/2$. Informacja o tym, że wyraz ciągu ma daleką pozycję, pozwala z bardzo dobrą dokładnością określić wartość tego wyrazu — nie musimy przy tym wiedzieć, który konkretnie to wyraz, bo dalekie wyrazy ciągu są prawie takie same.

Z kolei w ciągu (b_n) wyrazy są na przemian równe 1 i -1. Informacja o tym, że liczba jest dalekim wyrazem tego ciągu nie pozwala podać jej przybliżonej wartości, gdyż liczba ta równie dobrze może być jedynką lub minus jedynką.

W ciągu (c_n) dalekie wyrazy są dużymi liczbami dodatnimi, nie zbliżają się więc do żadnej konkretnej wartości liczbowej.

Natomiast w ciągu (d_n) dalekie wyrazy mają dużą wartość bezwzględną, ale na dodatek bywają zarówno ujemne jak i dodatnie.

Dla pozostałych ciągów prawdziwe są oszacowania:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}<e_n<\frac{1}{2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{8n}<f_n<\frac{1}{3} \tag{2}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{9n}<g_n<\frac{1}{4} \tag{3}$$

$$1\leqslant h_n<1+\frac{2}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

z których to oszacowań wynika, że bardzo dalekie wyrazy tych ciągów są z bardzo dobrym przybliżeniem równe odpowiednio 1/2, 1/3, 1/4, 1. Do oszacowań tych możemy dorzucić utrzymane w tym samym stylu oszacowanie

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}<a_n<\frac{1}{2} \tag{5}$$

wynikające z nierówności

$$\frac{1}{4n}>\frac{1}{2\cdot(2n+1)}$$

oraz oszacowanie

$$1\leqslant h_n<1+\frac{3}{n^{2/3}}\,. \tag{6}$$

Skoro dalekie wyrazy ciągów (a_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n) są z dobrym przybliżeniem równe odpowiednio 1/2, 1/2, 1/3, 1/4, 1, zastanówmy się jak daleko wystarczy[7] się posunąć w tych ciągach, aby błąd tego przybliżenia był mniejszy od jednej milionowej.

Biorąc pod uwagę, że

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4n}$$

$$\left|e_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{8n}$$

$$\left|f_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{8n}$$

$$\left|g_n-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{9n}$$

$$|h_n-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$|h_n-1|<\frac{3}{n^{2/3}}$$

wystarczy zapewnić, iż prawe strony tych nierówności nie będą większe od wymaganej przez nas jednej milionowej. To oznacza, że wystarczy, aby n było nie mniejsze odpowiednio[8] od 250 000, 125 000, 125 000, 111 112, 4 000 000 000 000, 6 000 000 000.

[7]Zwracam uwagę na słowo "wystarczy". Nie pytam jak daleko "trzeba" się posunąć, bo to sugerowałoby wskazanie optymalnego (najwcześniejszego) miejsca. Tymczasem chodzi o wskazanie jakiegokolwiek miejsca (być może niepotrzebnie zbyt dalekiego), począwszy od którego żądane przybliżenie na pewno jest realizowane.

[8]Dla uzyskania ostatniej liczby wykorzystujemy nierówność $3^{3/2}=\sqrt{27}<6$, z której wynika

$$3\,000\,000^{3/2}<6\,000\,000\,000\,.$$

W konsekwencji otrzymujemy:

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4n}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 250\,000$$

$$\left|e_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{8n}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 125\,000$$

$$\left|f_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{8n}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 125\,000$$

$$\left|g_n-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{9n}<\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 111\,112$$

$$|h_n-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 4\,000\,000\,000\,000$$

$$|h_n-1|<\frac{3}{n^{2/3}}<\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 6\,000\,000\,000$$

Dla każdego z ciągów (a_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n) wskazaliśmy więc taką liczbę[9] N, że dla wszystkich liczb naturalnych $n\geqslant N$ różnica między n-tym wyrazem odpowiedniego ciągu a liczbą, do której wyrazy ciągu się zbliżają, jest mniejsza od jednej milionowej. Oczywiście ta jedna milionowa jest tylko przykładową liczbą — zamiast niej można byłoby wziąć jakąkolwiek liczbę rzeczywistą dodatnią i stosownie do niej wyznaczyć liczbę N mówiącą jak daleko należy się w ciągu posunąć.

Liczba N wcale nie jest jednoznacznie wyznaczona, gdyż nie zakładamy jej optymalności. Być może jest ona niepotrzebnie duża, co może wynikać z naszej fantazji, a może wynikać z oszacowań, jakimi dysponowaliśmy, aby ją uzyskać.

Czas najwyższy odkryć karty i wyraźnie napisać to, czego większość z Was już się zapewne domyśla. Otóż całe te rozważania prowadzą do umotywowania pojęcia granicy ciągu.

Definicja: Liczbę rzeczywistą g nazywamy granicą ciągu[10] (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon\,.$$

Komentarze do definicji:

• Mam zwyczaj pisać specyfikacje pod kwantyfikatorami, a nie po nich. Uważam bowiem, że tak jest czytelniej, choć może nie do końca zgodnie z przyjętymi obyczajami.

• Zmienne ε oraz N przyjmują wartości rzeczywiste, a zmienna n wartości naturalne. Jednak wolę napisać to obok lub zostawić w domyśle, niż dodatkowo komplikować tymi warunkami i tak już rozbudowany wzorek.

[9]Tutaj w każdym z przypadków liczba N jest całkowita, ale ma to jedynie walor estetyczny. Gdyby N było liczbą niecałkowitą, nic złego by się nie stało.

[10]Chodzi oczywiście o dowolny ciąg (a_n), a nie tylko o ten konkretny przykład ciągu, który wcześniej sobie tak oznaczyliśmy.

W podanych szacowaniach rolę ε przyjęła jedna milionowa. Wykorzystując oszacowania, ktróymi akurat dysponowaliśmy, byliśmy w stanie wskazać takie miejsce w ciągu, od którego począwszy[11] wyrazy różnią się na pewno o mniej niż ów ε od granicy. Przyjrzyjmy się ciągowi (h_n). Wykorzystując dwa różne oszacowania, a mianowicie (4) oraz (6), byliśmy w stanie uzyskać wartości:
$N = 4\,000\,000\,000\,000$ na podstawie nierówności (4),
$N = 6\,000\,000\,000$ na podstawie nierówności (6) oraz $3\,000\,000^{3/2} < 6\,000\,000\,000$.

Które N jest więc dobrze dobrane do $\varepsilon = 10^{-6}$ dla ciągu (h_n) ?
I jedno i drugie i każde inne większe od nich. Przypomnijmy, że według naszych wcześniejszych ustaleń

$$|h_n - 1| < \frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n \geqslant 4\,000\,000\,000\,000$$
$$|h_n - 1| < \frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n \geqslant 6\,000\,000\,000$$

ale stąd wynika także

$$|h_n - 1| < \frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n \geqslant 10^{2023}$$

Istotne jest tylko to, że dla każdego ε istnieje **jakieś** N, które spełnia warunek podany dalej w definicji granicy ciągu:

$$\underset{n \geqslant N}{\forall} \ |h_n - 1| < \varepsilon \,.$$

Dodajmy do tego parę drobnych uwag: Jeśli ciąg ma granicę, to nazywamy go ciągiem zbieżnym. W przeciwnym razie mówimy o ciągu rozbieżnym. Jeśli ciąg ma granicę, to jest ona jedyna — ciąg nie może być jednocześnie zbieżny do różnych granic. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to jego granicę zapisujemy[12] jako

$$\lim_{n\to\infty} a_n \,.$$

Warunek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ możemy też zapisać[13] jako "$a_n \to g$ przy $n \to \infty$" albo po prostu jako "$a_n \to g$", gdy z oznaczeń lub kontekstu nie ma wątpliwości, że chodzi o n dążące do nieskończoności.

Zgodnie z tymi oznaczeniami możemy zapisać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2} - n = \frac{1}{3}\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - n = \frac{1}{4}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

[11] Ale może już znacznie wcześniej — nie interesuje nas to specjalnie.
[12] A przy tym **lim** czytamy jako *limes*.
[13] Czytamy: a_n dąży do g przy n dążącym do nieskończoności.

Obliczanie granic ciągów.

Przytoczmy, na razie bez dowodu, podstawowe twierdzenia, które pozwolą nam obliczać granice ciągów zbieżnych[14] bez odwoływania się do definicji granicy.

1. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

2. Granica sumy jest sumą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

3. Granica różnicy jest różnicą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n-b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

4. Granica iloczynu jest iloczynem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_nb_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

5. Granica ilorazu jest ilorazem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n\neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\ .$$

6. Zbieżność i granica nie zależą od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów ciągu.

7. Słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym dla każdego n zachodzi nierówność $a_n\leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n\geqslant b_n$), to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$).

8. Kilka podstawowych granic.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
$\lim\limits_{n\to\infty}a=a$
$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ dla $|a|<1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ dla $a>0$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

9. Z granicą można wchodzić pod pierwiastek.
Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n\geqslant 0$, to dla $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}a_n}\ .$$

Dla nieparzystych k warunek $a_n\geqslant 0$ można pominąć.

[14]Na razie mówimy tylko o granicach właściwych, czyli będących liczbami rzeczywistymi.

A oto przykłady zastosowania powyższych twierdzeń do obliczenia trzech granic, które wynikają także z podanych wcześniej oszacowań.

Przykład 1: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przekształcamy wyrażenie pod znakiem granicy, a następnie wykonujemy przejście graniczne:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Przykład 2: Obliczyć granicę

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów przekształcamy wyrażenie pod znakiem granicy, a następnie wykonujemy przejście graniczne:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+n^2\right)^{2/3}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}=$$

$$=\frac{1}{(1+0)^{2/3}+\sqrt[3]{1+0}+1}=\frac{1}{3}\,.$$

Przykład 3: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3}-n\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów przekształcamy wyrażenie pod znakiem granicy, a następnie wykonujemy przejście graniczne:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\left(\sqrt{n^4+n^3}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)}=\frac{1}{4}\,.$$

Twierdzenie o trzech ciągach.

A teraz kolejne twierdzenie umożliwiające sprawne obliczanie granic ciągów.

Na początek spójrzmy na takie zadanie:

Przykład 4: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

W pierwszym odruchu niejeden początkujący granicoobliczeniowiec pomyśli tak: Wyraz ciągu jest sumą, której każdy składnik dąży do zera, a że granica sumy jest sumą granic, to w granicy otrzymamy sumę zer, czyli zero. Niestety takie rozumowanie jest błędne i prowadzi do błędnych wyników.

Mamy bowiem uproszczoną sytuację:

$$1=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}_{n\text{ razy}},$$

w której lewa strona jest jedynką, a prawa strona jest sumą składników dążących do zera przy $n\to\infty$. Widać tu ewidentnie, że granica sumy składników dążących do zera może być różna od zera, jeśli liczba składników rośnie nieograniczenie.

Granica sumy, i owszem, jest sumą granic, ale aby tak twierdzić, musimy mieć ustaloną liczbę składników.

Wyrażenia pod znakiem granicy nie uda nam się sensownie przekształcić — pierwiastki dość przypadkowych liczb w mianownikach skutecznie odbierają nam nadzieję na użyteczne przekształcenie tej sumy. Będąc niewolnikami dokładnego przekształcania wyrażeń, nie ruszymy z miejsca. Tymczasem nasz cel jest skromniejszy niż kurczowe trzymanie się dokładnej wartości wyrazów ciągu: chcemy zrozumieć jaka jest w przybliżeniu wielkość wyrazów ciągu o dużych indeksach.

W tym celu dokonajmy szacowania danej sumy od góry i od dołu przez możliwie proste wyrażenia. Szacowanie nie musi być super dokładne, byleby nie było przeraźliwie grube. Oszacujemy sumę przez liczbę jej składników pomnożoną przez składnik najmniejszy[15] i największy[16]. Suma ma n składników, z których pierwszy jest największy, a ostatni najmniejszy. Wobec tego

$$1\leftarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1\,.$$

Ponieważ dla dużych n oba oszacowania (dolne i górne) są liczbami bliskimi 1, więc rozważana suma jest także bliska 1. To sugeruje, że dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 1.

[15] Dla oszacowania od dołu.
[16] Dla oszacowania od góry.

Tak jest w istocie, gdyż w powyższym rozumowaniu wykorzystaliśmy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH[17]: Jeżeli dane są takie trzy ciągi (a_n), (b_n), (c_n), że dla każdej[18] liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n \,,$$

a ponadto ciągi (b_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy g, to ciąg (a_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g, czyli wspólna granica ciągów (b_n) i (c_n).

Skrótowo możemy to zapisać przy pomocy symboli jako:

$$\left(\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} b_n \leqslant a_n \leqslant c_n\right) \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = g\,.$$

Użytek z twierdzenia o trzech ciągach robimy następujaco. Załóżmy, że dany jest ciąg, w którym nie jesteśmy w stanie sensownie przekształcić wzoru na n-ty wyraz. Jeżeli potrafimy tak oszacować wyrazy ciągu od góry i od dołu, aby oszacowania te miały wspólną granicę, to ta wspólna granica jest także granicą wyjściowego ciągu. Oszacowania te powinny mieć następujące 3 cechy:
- wyrażenia, którymi szacujemy wyrazy ciągu powinny być na tyle proste, aby dało się w nich łatwo przejść do granicy,
- szacowania nie powinny być zbyt grube, bo wyrażenia szacujące powinny mieć wspólną granicę,
- przy spełnieniu powyższych dwóch warunków, powinniśmy starać się przeprowadzić oszacowania w możliwie najprostszy sposób.

Popatrzmy na kolejny przykład:

Przykład 5: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+1}+\frac{\sqrt{n^4+2}}{n^3+2}+\frac{\sqrt{n^4+3}}{n^3+3}+\ldots+\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+n}\right).$$

Rozwiązanie:

Pod znakiem granicy występuje suma złożona z n składników[19]. Tym razem nie będziemy mieli ambicji, aby określić, który składnik jest największy, a który najmniejszy. Nie jest to oczywiste, gdyż w miarę posuwania się od początku do końca sumy, liczniki składników rosną[20], ale rosną też mianowniki[21].

[17]Twiedzenie to jest czasem żartobliwie nazywane twierdzeniem o policjantach, ze względu na następujące sformułowanie: *Jeżeli ulicą idzie dwóch policjantów, a miedzy nimi student, i policjanci idą na komisariat, to student też idzie na komisariat.*

[18]Prościej i zgrabniej jest powiedzieć "dla każdej", ale ponieważ zbieżność i granica ciągu nie zależą od majstrowania przy skończenie wielu wyrazach ciągu, można byłoby napisać "dla prawie każdej", rozumiejąc przez to, że dopuszczamy skończenie wiele n, dla których te nierówności nie są spełnione.

[19]Na wykładzie podaję przykłady, w których sumy mają n składników. Chodzi o to, aby nie komplikować tych przykładów i wyraźnie pokazać podstawowe zjawiska. Przykłady, w których wyznaczenie liczby wyrazów jest istotną częsią zadania, pojawią się na liście zadań nr 9.

[20]Co przy dodatnich składnikach jest przyczynkiem do wzrostu składników.

[21]A to z kolei jest przyczynkiem do tego, aby składniki malały.

W zupełności wystarczy, że oszacujemy składniki od góry i od dołu, korzystając z postaci k-tego[22] składnika:

$$\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+k}}{n^3+k} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+1}\,.$$

W powyższych oszacowaniach oszacowaliśmy niezależnie od siebie mianowniki i liczniki. Inne sensowne oszacowania to:

$$\frac{\sqrt{n^4+0}}{n^3+n} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+k}}{n^3+k} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+0}\,.$$

Wykorzystanie ostatnich oszacowań w połączeniu z wyznaczoną wcześniej liczbą składników równą n daje:

$$n\cdot\frac{\sqrt{n^4+0}}{n^3+n} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+1}+\frac{\sqrt{n^4+2}}{n^3+2}+\frac{\sqrt{n^4+3}}{n^3+3}+\ldots+\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+n} \leqslant n\cdot\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+0}\,.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do 1 przy $n\to\infty$, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 1.

W powyższych dwóch przykładach szacowania sum miały możliwie prostą postać: liczba składników razy wspólne oszacowanie składników. Taka strategia szacowania wystarczy do rozwiązania zadań z listy 9.

Zajmijmy się teraz przykładami, w których takie podejście jest niewystarczające.

Przykład 6: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots+\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}}\right).$$

Najpierw zobaczmy, do czego doprowadzi szacowanie składników przez wspólną wielkość:

$$1\leftarrow n\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}} \leqslant \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots+\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}} \leqslant n\cdot\frac{2n}{\sqrt{n^4+1}}\to 2\,.$$

Tym razem oszacowania dolne i górne dążą do różnych granic. Zatem rozważany w zadaniu ciąg[23] może być zbieżny do jakiejkolwiek liczby pomiędzy[24] 1 i 2, ale może być też rozbieżny, jak np. ciąg $\left(\frac{7}{5}+\frac{(-1)^n}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mający na przemian wyrazy 1,2 i 1,6.

Skąd wziął się problem? Czyżbyśmy zrobili jakieś oszacowania za grubo? Przyjęta strategia, aby wrzucić wszystkie składniki sumy do jednego worka i szacować wspólnie, nie miała szansy powodzenia. A to dlatego, że iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 2 przy $n\to\infty$, czyli dla dużych n jest prawie równy 2. Jeśli do jednego worka

[22] Gdzie $1\leqslant k\leqslant n$.

[23] Chodzi oczywiście o ciąg, którego n-ty wyraz jest równy

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots+\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}}\,.$$

[24] Z 1 i 2 włącznie.

wrzucamy składniki, z których największy jest prawie dwa razy większy od najmniejszego, to nie dziwmy się, że oszacowania dolne i górne różnią się o czynnik 2.

Zauważmy, że za różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki są z grubsza takie same. Wykonajmy więc szacowania tylko na poziomie mianowników[25], a następnie dodajmy liczniki, które tworzą postęp arytmetyczny. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+0}}=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)\,.$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n\cdot(3n+1)}{2}\,,$$

otrzymujemy

$$\frac{3}{2}\leftarrow\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\cdot\frac{n\cdot(3n+1)}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+k}} \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(3n+1)}{2}\to\frac{3}{2}\,,$$

skąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica jest równa 3/2.

Powyższy przykład może być nieco demoralizujący. Początkowa próba szacowania dała oszacowania dążące do 1 i 2. Naturalnym kompromisem jest 1,5 i taką granicę w końcu otrzymaliśmy. Ktoś mógłby pomyśleć, że to cudowna droga do uogólnienia twierdzenia o trzech ciągach. To jednak wynika z prostoty przykładu, a konkretnie z tego, że wyrazy tworzą z grubsza postęp arytmetyczny[26].

Otóż suma postępu arytmetycznego jest właśnie takim kompromisem. Naiwnie można myśleć, że suma jest równa pierwszemu składnikowi razy liczba składników. A może ostatni składnik razy liczba składników? Dla postępu arytmetycznego odpowiedzią jest kompromis, a mianowicie jego suma jest średnią arytmetyczną tych dwóch naiwnie błędnie obliczonych sum.

Kolejny przykład pokazuje, że idealny kompromis nie zawsze jest właściwą odpowiedzią.

Przykład 7: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{4}{\sqrt{n^6+2}}+\frac{9}{\sqrt{n^6+3}}+\ldots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Wspólne szacowanie składników prowadzi do:

$$0\leftarrow n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^6+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+k}} \leqslant n\cdot\frac{n^2}{\sqrt{n^6+0}}\to 1\,,$$

co może skłaniać do obstawienia 1/2 jako granicy.

[25] Po to, aby po oszacowaniu wszystkie składniki miały wspólny mianownik, dzięki czemu będzie można je dodać.

[26] Bo mianowniki są zbliżone, a postęp arytmetyczny jest w licznikach.

Tymczasem wykonując szacowania mianowników otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+0}}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2\,,$$

co po uwzględnieniu

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

daje

$$\frac{1}{3}\leftarrow\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+k}}\leqslant\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\to\frac{1}{3}\,.$$

Zatem szukana granica ma wartość $1/3$.

Kolejny przykład:

Przykład 8: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^k+1}}+\frac{8}{\sqrt[3]{n^k+2}}+\frac{27}{\sqrt[3]{n^k+3}}+\ldots+\frac{n^3}{\sqrt[3]{n^k+n}}\right)$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Szacowania mianowników prowadzą do:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^k+n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^3=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+0}}=\frac{1}{n^{k/3}}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^3\,,$$

co po uwzględnieniu

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

daje

$$\frac{1}{n^{k/3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^k-1}}}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+i}}\leqslant\frac{1}{n^{k/3}}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Powyższe oszacowania dolne i górne dążą do $1/4$, o ile $k/3=4$, czyli $k=12$.

A na koniec takie oto zadanko:

Przykład 9: Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $2n+1$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{2n+1}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy przy $k\geqslant 3$ mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{2n+1}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(2n+1)}{\sqrt{n^k+0}}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(2n+1)}{n^{k/2}}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{2n+1}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(2n+1)}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(2n+1)=(2n+1)\cdot(n+1)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{n^{k/2}}\to 2$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=4$. Podobnie

$$a_n=\frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}=\frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{n^{k/2}\cdot\sqrt{1+(1+n^{-1})^2\cdot n^{2-k}}}\to 2$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=4$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n ,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 ,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2 .$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma dla $k=4$ wartość 2.

Własności ciągów.

Poniżej zebranie podstawowych własności ciągów i twierdzeń z nimi związanych.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Ciąg (a_n) jest **rosnący** (inne określenie: **ściśle rosnący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n<a_{n+1} \quad \text{lub równoważnie} \quad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m<a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Ciąg (a_n) jest **malejący** (inne określenie: **ściśle malejący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n>a_{n+1} \quad \text{lub równoważnie} \quad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m>a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Ciąg (a_n) jest **niemalejący** (inne określenie: **słabo rosnący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n\leqslant a_{n+1} \quad \text{lub równoważnie} \quad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m\leqslant a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Ciąg (a_n) jest **nierosnący** (inne określenie: **słabo malejący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n\geqslant a_{n+1} \quad \text{lub równoważnie} \quad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m\geqslant a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Ciąg (a_n) jest **stały**, jeżeli

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}}\ a_m=a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Ciąg jest **monotoniczny** (inne określenie: **słabo monotoniczny**), jeżeli jest niemalejący lub nierosnący.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Ciąg jest **ściśle monotoniczny**, jeżeli jest rosnący lub malejący.

Ciąg (a_n) jest **ograniczony z góry**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \leqslant M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **ograniczony z dołu**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \geqslant M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **ograniczony**, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z góry i z dołu, lub równoważnie

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |a_n| \leqslant M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **zbieżny**, jeżeli

$$\underset{g\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n - g| < \varepsilon\,.$$

* *

Ciąg (a_n) spełnia **warunek Cauchy'ego** (inaczej: jest **ciągiem Cauchy'ego**), jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{m,n\geqslant N}{\forall}\ |a_m - a_n| < \varepsilon\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do $+\infty$**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n > M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do $-\infty$**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n < M\,.$$

* *

Podciągiem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy każdy ciąg postaci $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, gdzie $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest rosnącym ciągiem o wyrazach całkowitych dodatnich.

Podstawowe twierdzenia.

A oto najważniejsze twierdzenia dotyczące ciągów.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny.
WNIOSEK: Ciąg zawierający podciąg rozbieżny jest rozbieżny.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.
WNIOSEK: Ciąg mający podciągi zbieżne do różnych granic jest rozbieżny.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Jeżeli ciąg można podzielić na skończenie wiele podciągów zbieżnych do tej samej granicy, to jest on zbieżny do tejże granicy.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Twierdzenie Bolzana-Weierstrassa:
Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

Liczba e.

Na początek rozwiążemy dwa zadania dotyczące monotoniczności ciągów. Ale zanim do nich przystąpimy, przypomnijmy **nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną:**

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność[27]

$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\,.$$

Inna wersja tej samej nierówności:

$$x_1x_2x_3\ldots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)^n\,. \tag{7}$$

Nierówność (7) można wysłowić następująco:
(*) Iloczyn n liczb rzeczywistych dodatnich o ustalonej sumie jest największy, gdy liczby te są równe.

Istotnie, po obu stronach nierówności (7) występuje tyle samo czynników[28] (a mianowicie n), o takiej samej sumie równej $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$.

Przykład 10: Udowodnić, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

jest rosnący, czyli dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Daną w treści zadania nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\,,$$

czyli[29]

$$(n+1)^{2n+1} < n^n \cdot (n+2)^{n+1}\,. \tag{8}$$

Mnożąc nierówność (8) stronami przez n otrzymujemy nierówność równoważną

$$n\cdot(n+1)^{2n+1} < n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+1}\,,$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+n\right)\cdot\left(n^2+2n+1\right)^n < \left(n^2+2n\right)^{n+1}\,. \tag{9}$$

[27] A przy tym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ są równe.

[28] Po prawej stronie występuje n równych czynników.

[29] Do nierówności (8) każdy powinien dojść bez problemu. I tu zaczynają się schody, bo nie od razu widać, co robić dalej. Jeśli mamy skorzystać z nierówności między średnimi w wersji (*), to po stronie nierówności, która ma być większa, powinniśmy uzyskać iloczyn równych czynników, czyli potęgę. To oznacza, że prawą stronę nierówności (8) trzeba uzupełnić dodatkowym czynnikiem n.

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (9) występuje iloczyn $n+1$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+3n^2+2n, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

Przykład 11: Udowodnić, że ciąg (b_n) określony wzorem

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

jest malejący, czyli dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Rozwiązanie:

Daną w treści zadania nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}>\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}},$$

czyli[30]

$$(n+1)^{2n+3}>n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}. \tag{10}$$

Mnożąc nierówność (10) stronami przez $n+1$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$(n+1)^{2n+4}>(n+1)\cdot n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2},$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+2n+1\right)^{n+2}>\left(n^2+3n+2\right)\cdot\left(n^2+2n\right)^{n+1}. \tag{11}$$

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (11) występuje iloczyn $n+2$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+4n^2+5n+2, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Podsumujmy, co uzyskaliśmy. Rozważaliśmy dwa ciągi określone wzorami

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n,$$

z których (a_n) okazał się rosnący, a (b_n) malejący.

Ciągi te są ograniczone, gdyż ciąg (a_n) jest ograniczony z góry[31] przez $b_1=4$, a ciąg (b_n) jest ograniczony z dołu przez $a_1=2$.

[30]Zastosowanie nierówności między średnimi w wersji (*) bezpośrednio do nierówności (10) nie da spodziewanych rezultatów, gdyż suma czynników po lewej stronie okazuje się być mniejsza niż po stronie prawej. Bardziej subtelne oszacowanie dostaniemy dla czynników będących wyrażeniami kwadratowymi od n, a w tym celu trzeba czynniki liniowe pogrupować po dwa. To wymaga parzystego wykładnika po lewej stronie i dlatego domnażamy nierówność (10) przez $n+1$.

[31]Bo $a_1<a_n<b_n<b_1$.

Jako ciągi monotoniczne i ograniczone ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne. Niech więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e_a$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e_b\,.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{e_b}{e_a}\,,$$

ale także

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

Stąd wniosek, że $e_a = e_b$, czyli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do tej samej granicy, którą oznaczamy przez e.

Ciągi – trochę teorii i dowodów.

A teraz uzupełnienie wiedzy teoretycznej o ciągach liczbowych.

Przykładowy dowód: granica sumy jest sumą granic.

Udowodnimy, że jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, a ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy h, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny do $g+h$.

Zakładamy:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon$$

Chcemy udowodnić:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

Pierwsza naiwna próba dowodu polega na bezmyślnym manipulowaniu nierównościami wyjętymi z kontekstu kwantyfikatorów, w którym są one osadzone.
A konkretnie: z nierówności

$$|a_n-g|<\varepsilon$$

oraz

$$|b_n-h|<\varepsilon$$

chcemy uzyskać oszacowanie wielkości

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|\,.$$

Możemy przy tym korzystać z nierówności trójkąta: $|x+y|\leqslant|x|+|y|$. Najlepsze oszacowanie, jakie udaje się wykonać, to

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|=|(a_n-g)+(b_n-h)|\leqslant|a_n-g|+|b_n-h|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\,.$$

Widzimy, że wielkość tę udało nam się oszacować przez 2ε zamiast wymaganego w definicji ε. Z tego można się próbować wytłumaczyć, twierdząc, że 2ε może być uczynione dowolnie małym. To może dać **złudzenie przeprowadzonego dowodu.** Ale zignorowanie kwantyfikatorów i wykonanie manipulacji na nierównościach wyrwanych z kontekstu nie może doprowadzić do rozumowania, które dałoby się uznać za dowód.

Podstawowy problem polega na tym, że w rozważnych trzech definicjach występują zmienne związane nazywane tymi samymi literkami (ε, N, n), co mocno utrudnia prześledzenie zależności między nimi. Dlatego dopiszmy do tych literek znaczki, które formalnie niczego nie wnoszą, ale przypominają nam co pochodzi z której definicji i od czego zależy:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geq N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{N_2(\varepsilon_2)}{\exists}\ \underset{n\geq N_2(\varepsilon_2)}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon_2$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

Na przykład $N_1(\varepsilon_1)$ oznacza N dobrane w pierwszej definicji do ε_1.

Tak więc zakładając

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{N_2(\varepsilon_2)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_2(\varepsilon_2)}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon_2$$

chcemy udowodnić

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

W tym momencie szacowanie wielkości

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|$$

przybiera postać

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|=|(a_n-g)+(b_n-h)|\leqslant|a_n-g|+|b_n-h|<\varepsilon_1+\varepsilon_2\,.$$

Wymaga ono użycia nierówności

$$|a_n-g|<\varepsilon_1$$

oraz

$$|b_n-h|<\varepsilon_2\,,$$

które są spełnione odpowiednio dla $n\geqslant N_1(\varepsilon_1)$ oraz $n\geqslant N_2(\varepsilon_2)$. Aby uzyskać

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

na podstawie

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

wystarczy przyjąć $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2$.

* * * * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Teraz możemy pozbierać te uwagi i zredagować dowód tego, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

Mamy dowieść:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \text{coś tam}$$

Czyli schemat dowodu jest taki: dostajemy od kogoś ε. Do tego epsilona mamy dobrać takie N, aby dalej było dobrze, czyli aby dla każdego $n\geqslant N$ zachodziło **coś tam**. Tym **coś tam** jest nierówność

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon\,,$$

która wymaga

$$|a_n-g|<\varepsilon_1$$

oraz

$$|b_n-h|<\varepsilon_2\,,$$

a to z kolei wymaga $n\geqslant N_1(\varepsilon_1)$ oraz $n\geqslant N_2(\varepsilon_2)$ przy $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2$.

* *

No to lecimy z dowodem wyczyszczonym z niepotrzebnych elementów:

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Dobieramy

$$N=\max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Wówczas dla każdego $n\geqslant N$ mamy

$$n\geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\qquad\text{oraz}\qquad n\geqslant N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

skąd otrzymujemy odpowiednio

$$|a_n-g|<\frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$|b_n-h|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Stąd

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|=|(a_n-g)+(b_n-h)|\leqslant|a_n-g|+|b_n-h|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

To kończy dowód twierdzenia o sumie granic.

Przykładowy dowód: granica iloczynu jest iloczynem granic.

Udowodnimy, że jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, a ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy h, to ciąg (a_nb_n) jest zbieżny do gh.

Zakładając

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{N_2(\varepsilon_2)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_2(\varepsilon_2)}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon_2$$

chcemy udowodnić

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_nb_n)-(gh)|<\varepsilon$$

W zasadzie chciałoby się przepisać poprzedni dowód, ale nie widać od razu jak oszacować

$$|(a_nb_n)-(gh)|\,.$$

Sztuczka, jaką stosujemy dla oszacowania różnicy iloczynu, to wprowadzenie z plusem i z minusem ilocznynu zawierającego po jednym czynniku z każdego z odejmowanych iloczynów:

$$|a_nb_n-gh|=|a_nb_n-a_nh+a_nh-gh|\leqslant|a_nb_n-a_nh|+|a_nh-gh|=$$
$$=|a_n|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|=|a_n-g+g|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant$$
$$\leqslant(|a_n-g|+|g|)\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant(1+|g|)\cdot\varepsilon_2+|h|\cdot\varepsilon_1<(|g|+1)\cdot\varepsilon_2+(|h|+1)\cdot\varepsilon_1\,,$$

o ile

$$|a_n-g|<1,\qquad |a_n-g|<\varepsilon_1\qquad \text{oraz}\qquad |b_n-h|<\varepsilon_2\,.$$

Do tego potrzebujemy:

$$(|g|+1)\cdot\varepsilon_2+(|h|+1)\cdot\varepsilon_1\leqslant\varepsilon\,,$$

co wymaga na przykład

$$(|h|+1)\cdot\varepsilon_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$(|g|+1)\cdot\varepsilon_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

czyli

$$\varepsilon_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}$$

oraz

$$\varepsilon_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\,.$$

To prowadzi do następującego dowodu:

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Dobieramy

$$N=\max\left(N_1(1),N_1\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}\right),N_2\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\right)\right).$$

Wówczas dla każdego $n\geqslant N$ mamy

$$n\geqslant N_1(1),\qquad n\geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}\right)\qquad\text{oraz}\qquad n\geqslant N_2\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\right),$$

skąd otrzymujemy odpowiednio

$$|a_n-g|<1\,,$$

$$|a_n-g|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}$$

oraz

$$|b_n-h|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\,.$$

Stąd

$$|a_nb_n-gh|=|a_nb_n-a_nh+a_nh-gh|\leqslant|a_nb_n-a_nh|+|a_nh-gh|=$$

$$=|a_n|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|=|a_n-g+g|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant$$

$$\leqslant(|a_n-g|+|g|)\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant(1+|g|)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}+|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}<$$

$$<(|g|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}+(|h|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}=\varepsilon\,.$$

Warunek Cauchy'ego.

Przypomnijmy, że ciąg (a_n) spełnia **warunek Cauchy'ego** (inaczej: jest **ciągiem Cauchy'ego**), jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{m,n\geqslant N}{\forall}\ |a_m-a_n|<\varepsilon\,.$$

Intuicyjnie: Warunek Cauchy'ego oznacza, że dalekie wyrazy ciągu są bliskie sobie.

Okazuje się, że spełnianie warunku Cauchy'ego **jest równoważne zbieżności** ciągu.

Udowodnimy to tylko w jedną stronę, a mianowicie wykażemy, że ze zbieżności ciągu (a_n):

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

wynika spełnianie przez niego warunku Cauchy'ego:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{m,n\geqslant N}{\forall}\ |a_m-a_n|<\varepsilon$$

Dowód wygląda następująco:

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Dobieramy

$$N = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Wówczas dla każdych $m,n \geqslant N$ mamy

$$m \geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{oraz} \qquad n \geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

skąd otrzymujemy

$$|a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd

$$|a_m - a_n| = |(a_m - g) + (g - a_n)| \leqslant |a_m - g| + |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Naturalne wydaje się pytanie: Skoro warunek Cauchy'ego i zbieżność oznaczają to samo, to po co używać dwóch różnych pojęć dla określenia tej samej własności?

Otóż ludzie uogólniają zbieżność ciągów na bardziej abstrakcyjne obiekty, zwane przestrzeniami metrycznymi. W każdej przestrzeni metrycznej ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego, czego dowód praktycznie jest powyżej[32]. Natomiast w drugą stronę to już nie zawsze tak jest. Co więcej, to że w jakiejś przestrzeni metrycznej każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny, jest na tyle interesujące, że doczekało się specjalnej nazwy: przestrzeń metryczna, w której tak jest, nazywa się **przestrzenią zupełną.**

Bardzo łatwo wyobrazić sobie przestrzeń, która nie jest zupełna: liczby wymierne. W świecie liczb wymiernych ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych[33] liczby $\sqrt{2}$:

$$a_n = \frac{\left[10^n \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right]}{10^n}$$

spełnia warunek Cauchy'ego, ale do żadnej liczby wymiernej zbieżny nie jest.

Twierdzenie Bolzana-Weierstrassa.

Trzeba znać ideę dowodu tego twierdzenia. Najlepiej obejrzeć (jeśli ktoś tego wcześniej nie zrobił) w internecie[34] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **21:** Podciąg ciągu. Lemat Bolzano-Weierstrassa.

[32]Idea ogólnego dowodu jest niezmienna niezależnie od komplikacji samej przestrzeni: jeśli wyrazy ciągu są bliskie granicy, to są bliskie siebie.

[33]Zapis $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, a więc $\left[x + \frac{1}{2}\right]$ jest zaokrągleniem liczby x do najbliższej liczby całowitej, gdzie połówki zaokrąglamy w górę.

[34]Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`