

1046. Funkcje $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są określone wzorami

$$f(x) = e^{x^9} \quad \text{oraz} \quad g(x) = e^{x^7}.$$

Podaj wartość ilorazu pochodnych

$$\frac{f^{(63)}(0)}{g^{(63)}(0)}.$$

Odpowiedź: 72

1047. Funkcje $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są określone wzorami

$$f(x) = e^{x^{12}} \quad \text{oraz} \quad g(x) = e^{x^{10}}.$$

Podaj wartość ilorazu pochodnych

$$\frac{f^{(60)}(0)}{g^{(60)}(0)}.$$

Odpowiedź: 6

1048. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: $30!/15!$

1049. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = e^{x^3}.$$

Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: $30!/10!$

1050. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{99n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}.$$

Odpowiedź: 18

1051. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{30n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4kn}}.$$

Odpowiedź: 5

1052. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{n}{k^2}.$$

Odpowiedź: 8/9

1053. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \frac{n^2}{k^3}.$$

Odpowiedź: 60/121

1054. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a , że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z = a + bi$.

Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b = 0, \quad a \in [-1, 1)$

b) $b = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}, \quad a \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

c) $b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

d) $b = \frac{1}{2}, \quad a \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

1055. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $0 \leq a < b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wokół osi OY (krzywa jest w płaszczyźnie XY) jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wyznacz pole powierzchni (fragmentu paraboloidy obrotowej)

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 7\}.$$

Wskazówka: Dana w zadaniu powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z = x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{7}$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ .
Rozwiązanie:

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z = x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{7}$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ , przyjmijmy w podanym wzorze $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = \sqrt{7}$.

Biorąc pod uwagę, że $f'(x) = 2x$ oraz wykonując po drodze podstawienie $t = 1 + 4x^2$, czyli formalnie $dt = 8x dx$, otrzymujemy:

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^{\sqrt{29}} \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^{29} =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^{29} = \frac{\pi}{6} \cdot 29^{3/2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot (29\sqrt{29} - 1).$$

Odpowiedź:

Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe $\frac{\pi}{6} \cdot (29\sqrt{29} - 1)$.

1056. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{x+1}, \quad x = t^2 - 1$$

i formalnie

$$dx = 2t dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 3]$ odpowiada przedziałowi $t \in [1, 2]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} dx &= \int_1^2 15 \cdot (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt = 30 \cdot \int_1^2 t^4 - t^2 dt = 30 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \Big|_{t=1}^2 \right) = \\ &= 30 \cdot \left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3} \right) = 6 \cdot 31 - 10 \cdot 7 = 186 - 70 = 116. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 116.

1057. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 1 + 1} = \int_0^1 \frac{x dx}{(x-1)^2 + 1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t = x - 1, \quad x = t + 1$$

i formalnie

$$dx = dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 1]$ odpowiada przedziałowi $t \in [-1, 0]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(x-1)^2+1} &= \int_{-1}^0 \frac{(t+1) dt}{t^2+1} = \int_{-1}^0 \frac{t dt}{t^2+1} + \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= \left(\frac{\ln(t^2+1)}{2} \Big|_{t=-1}^0 \right) + \left(\operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1}^0 \right) = \\ &= \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1) = 0 - \frac{\ln 2}{2} + 0 - \frac{-\pi}{4} = \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$.

1058. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-x^2} &= \frac{1}{(x-1) \cdot x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x}, \\ 1 &= A \cdot x^2 + B \cdot (x-1) + D \cdot (x-1) \cdot x, \\ 1 &= Ax^2 + Bx - B + Dx^2 - Dx, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 &= A+D \\ 0 &= B-D \\ 1 &= -B, \end{cases}$$

skąd $B = -1$, $D = -1$ i $A = 1$. W konsekwencji

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2} = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x} - \ln|x| + C.$$

1059. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+8} + \frac{9}{n^3+27} + \dots + \frac{k^2}{n^3+k^3} + \dots + \frac{4n^2}{n^3+8n^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie danej w zadaniu granicy prowadzi do

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{n^3+k^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right),$$

gdzie

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}.$$

Ponieważ uzyskana granica jest granicą ciągu sum Riemanna dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0, 2]$ odpowiadających podziałom tego przedziału na $2n$ przedziałów długości $1/n$, możemy zapisać jej wartość w postaci podanej niżej całki oznaczonej. Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$$

obliczamy wartość tej całki:

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \int_0^2 \frac{3x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3+1| \Big|_{x=0}^2 = \frac{1}{3} \cdot (\ln 9 - \ln 1) = \frac{2\ln 3}{3}.$$

Odpowiedź: Podana granica ma wartość $\frac{2\ln 3}{3}$.

1060. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \arctg x dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \arctg x dx &= \frac{x^4}{4} \cdot \arctg x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{9}{4} \cdot \arctg \sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctg x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{3} + \arctg \sqrt{3}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{2\pi}{3}$.

1061. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej oraz z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin^{2017} n^{2016}|}{n^{2/3} + n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3} + n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{0 + n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty,$$

bo $3/2 > 1$.

1062. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx$.

Rozwiązanie:

Oznaczamy daną całkę przez $I(x)$ i całkujemy dwukrotnie przez części:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3 \cos 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \int e^{2x} \cdot \cos 3x \, dx = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} \cdot \cos 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot (-3 \sin 3x) \, dx \right) = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{4} - \frac{9}{4} \cdot \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{4} - \frac{9}{4} \cdot I(x), \end{aligned}$$

co prowadzi do

$$4 \cdot I(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin 3x - 3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x - 9 \cdot I(x),$$

skąd

$$I(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot \sin 3x - 3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{13} + C.$$

1063. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8^n + n^{11}}}{\sqrt{4^n + n^{9999}}}.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego dla ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{11}}{8^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{9999}}{4^n} = 0.$$

Standardowe rachunki są tu pominięte, ale w rozwiązaniu muszą się znaleźć wraz z powołaniem się na odpowiednie kryterium.

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8^n + n^{11}}}{\sqrt{4^n + n^{9999}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{n^{11}}{8^n}}}{2^n \cdot \sqrt{1 + \frac{n^{9999}}{4^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{n^{11}}{8^n}}}{\sqrt{1 + \frac{n^{9999}}{4^n}}} = \frac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

1064. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x) = |x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1) = -1$. Wyznaczyć $f(1)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + D & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 0 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=0$, czyli musi zachodzić równość $C=D$.

Warunek $f(-1) = -1$ sprowadza się do $C = -1/2$.

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(1) = 0$.

1065. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int_1^2 \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \cdot \int_1^2 \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \cdot \int_1^2 \frac{t^3+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} dt = 6 \cdot \int_1^2 t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| \Big|_{t=1}^2 = 16 - 12 + 12 - 6\ln 3 - 2 + 3 - 6 + 6\ln 2 = 11 - 6\ln 3 + 6\ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $11 - 6\ln 3 + 6\ln 2 = 11 + 6\ln \frac{2}{3}$.

1066. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\begin{aligned} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}} &= n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}} = n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{1 + \sqrt{9 + \frac{k}{n}}} = \\ &= n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

gdzie $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{9+x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $55n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, przy obliczaniu której korzystamy z podstawienia $t = \sqrt{1 + \sqrt{9+x}}$, czyli $x = (t^2 - 1)^2 - 9 = t^4 - 2t^2 - 8$ i formalnie $dx = (4t^3 - 4t) dt$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^{55} f(x) dx = \int_0^{55} \sqrt{1 + \sqrt{9+x}} dx = \int_2^3 t \cdot (4t^3 - 4t) dt = 4 \cdot \int_2^3 t^4 - t^2 dt = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=2}^3 = 4 \cdot \left(\frac{243 - 32}{5} - \frac{27 - 8}{3} \right) = 4 \cdot \left(\frac{211}{5} - \frac{19}{3} \right) = 4 \cdot \frac{633 - 95}{15} = 4 \cdot \frac{538}{15} = \\ &= \frac{2152}{15}. \end{aligned}$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/4}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -5/4$.

Odpowiedź: Dla $p = -5/4$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2152/15$.

1067. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt[3]{x+1}$, czyli $x = t^3 - 1$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx &= \int (t^3 - 1)^2 \cdot t \cdot 3t^2 dt = 3 \cdot \int t^9 - 2t^6 + t^3 dt = 3 \cdot \left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{3t^{10}}{10} - \frac{6t^7}{7} + \frac{3t^4}{4} + C = \frac{3 \cdot (x+1)^{10/3}}{10} - \frac{6 \cdot (x+1)^{7/3}}{7} + \frac{3 \cdot (x+1)^{4/3}}{4} + C. \end{aligned}$$

Uwaga: Można też całkować przez części.

1068. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \cdot \ln x dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_{x=1}^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{x^3}{9} \Big|_{x=1}^e \right) = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$.

1069. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \arctg x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \Bigg|_{x=0}^1 = \\ &= \arctg 1 + \frac{\ln 2}{2} - \arctg 0 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

1070. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 2 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2} x^2 = 2,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax + B & \text{dla } x \in (-\infty, 3) \\ x^2 + Cx + D & \text{dla } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad (*)$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 3 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x = 3$, czyli musi zachodzić równość

$$3A + B = 3C + D. \quad (\clubsuit)$$

Warunki $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$0 = B, \quad (\diamond)$$

$$2 = 4 + 2A + B, \quad (\heartsuit)$$

$$4 = 16 + 4C + D. \quad (\spadesuit)$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań (\clubsuit), (\diamond), (\heartsuit) i (\spadesuit) prowadzi do

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -9, \quad D = 24.$$

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{dla } x \in (-\infty, 3) \\ x^2 - 9x + 24 & \text{dla } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad (**)$$

Zatem $f(5) = 4$.

1071. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} \, dx.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Podstawiamy $x = t^4$, czyli formalnie $dx = 4t^3 dt$:

$$\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} \, dx = \int_1^{\sqrt[4]{9}} 4t^3 \cdot \operatorname{arctg} t \, dt.$$

Następnie wykonujemy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt[4]{9}} 4t^3 \cdot \operatorname{arctg} t \, dt &= t^4 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt[4]{9}} - \int_1^{\sqrt[4]{9}} \frac{t^4}{t^2+1} \, dt = \\ &= 9 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[4]{9} - \operatorname{arctg} 1 - \int_1^{\sqrt[4]{9}} \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 + 1} \, dt = 9 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \int_1^{\sqrt[4]{9}} t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt[4]{9}} \right) = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{3 \cdot \sqrt[4]{9}}{3} - \sqrt[4]{9} + \operatorname{arctg} \sqrt[4]{9} - \frac{1}{3} + 1 - \operatorname{arctg} 1 \right) = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{9} - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} = 3\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{8\pi}{3} - \frac{2}{3}$.

1072. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \sqrt[3]{n+4} + \dots + \sqrt[3]{8n-2} + \sqrt[3]{8n-1} + \sqrt[3]{8n} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{7n} n^p \cdot \sqrt[3]{n+k} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{n+k} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1 + \frac{k}{n}} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $7n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^8 f(x) dx = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} \Big|_{x=1}^8 = \frac{3}{4} \cdot 16 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 15 = \frac{45}{4}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+4/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -4/3$.

Odpowiedź: Dla $p = -4/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $45/4$.

1073. W każdym z zadań **1073.1-1073.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D_f\}$.

1073.1. $f(x) = x^2 - 5$, $D_f = (-1, 3)$, $\|f\| = 5$

1073.2. $f(x) = x^3 - 15$, $D_f = (-1, 3)$, $\|f\| = 16$

1073.3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1/4$

1073.4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1$

1073.5. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 7}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 4/3$

1074. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}}.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}} = \int_1^3 \frac{dx}{1 + (\sqrt[3]{x-2})^2}$$

i wykonujemy podstawienie $t = \sqrt[3]{x-2}$, czyli $x = t^3 + 2$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{1 + (\sqrt[3]{x-2})^2} &= \int_{-1}^1 \frac{3t^2 dt}{1+t^2} = 3 \cdot \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = 3 \cdot \int_{-1}^1 dt - 3 \cdot \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= 6 - 3 \cdot \left(\operatorname{arctgt} \Big|_{t=-1}^1 \right) = 6 - 3 \cdot \operatorname{arctg} 1 + 3 \cdot \operatorname{arctg}(-1) = 6 - 3 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{-\pi}{4} = 6 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $6 - \frac{3\pi}{2}$.

1075. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 4}.$$

Wskazówka: $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2) \cdot (n^2 + 2n + 2)$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{n}{n^4 + 4} = \frac{n}{(n^2 - 2n + 2) \cdot (n^2 + 2n + 2)} = \frac{An + B}{n^2 - 2n + 2} + \frac{Cn + D}{n^2 + 2n + 2},$$

$$n = (An + B) \cdot (n^2 + 2n + 2) + (Cn + D) \cdot (n^2 - 2n + 2),$$

$$n = An^3 + 2An^2 + 2An + Bn^2 + 2Bn + 2B + Cn^3 - 2Cn^2 + 2Cn + Dn^2 - 2Dn + 2D,$$

$$\begin{cases} 0 &= 2B + 2D, & (n^0) \\ 1 &= 2A + 2B + 2C - 2D, & (n^1) \\ 0 &= 2A + B - 2C + D, & (n^2) \\ 0 &= A + C. & (n^3) \end{cases}$$

Z pierwszego i czwartego równania dostajemy odpowiednio $D = -B$ oraz $C = -A$, co prowadzi kolejno do

$$\begin{cases} 1 &= 2A + 2B - 2A + 2B, \\ 0 &= 2A + B + 2A - B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 &= 4B, \\ 0 &= 4A, \end{cases}$$

$$B = 1/4, \quad D = -1/4, \quad A = C = 0.$$

Zatem

$$\frac{n}{n^4 + 4} = \frac{1/4}{n^2 - 2n + 2} - \frac{1/4}{n^2 + 2n + 2} = \frac{1/4}{(n-1)^2 + 1} - \frac{1/4}{(n+1)^2 + 1}.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n}{n^4+4} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1/4}{(n-1)^2+1} - \frac{1/4}{(n+1)^2+1} \right) = \\ &= \left(\frac{1/4}{0^2+1} - \frac{1/4}{2^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{3^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{2^2+1} - \frac{1/4}{4^2+1} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1/4}{(N-3)^2+1} - \frac{1/4}{(N-1)^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{(N-2)^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} \right) + \\ &+ \left(\frac{1/4}{(N-1)^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \right) = \frac{1/4}{0^2+1} + \frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \rightarrow \frac{3}{8} \end{aligned}$$

przy $N \rightarrow \infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $3/8$.

1076. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} - \frac{1}{144} + \frac{1}{169} - \dots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, możemy beztrąsko zmieniać kolejność jego wyrazów, a nawet rozdzielać go na sumę dwóch szeregów. W konsekwencji otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest równa $\frac{\pi^2}{12}$.

1077. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n}\right) \cdot \left(4 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)} \geq \frac{(4n+1) \cdot (4n+5)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{4n-3}{3n-2} &\geq \frac{4n+5}{3n+7}, \\ (4n-3) \cdot (3n+7) &\geq (4n+5) \cdot (3n-2), \\ 12n^2 + 28n - 9n - 21 &\geq 12n^2 - 8n + 15n - 10, \\ 12n^2 + 19n - 21 &\geq 12n^2 + 7n - 10, \\ 12n &\geq 11, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

1078. Funkcja $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \int_1^x (\log_2 t - 3)^{2017} dt.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x) = (\log_2 x - 3)^{2017}$, mamy $f'(x) < 0$ dla $x \in (1, 8)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x > 8$. Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(1, 8)$ i rosnąca w przedziale $(8, +\infty)$, a zatem osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

1079. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5},$$

a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = x - 2$ i formalnie $dx = dt$ otrzymujemy

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int_0^5 \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \int_{-2}^3 \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctgt} \Big|_{t=-2}^3 = \operatorname{arctg}3 - \operatorname{arctg}(-2) =$$

$$= \operatorname{arctg}3 + \operatorname{arctg}2 = \arg(1 + 3i) + \arg(1 + 2i) = \arg((1 + 3i)(1 + 2i)) = \arg(-5 + 5i) = \frac{3\pi}{4}.$$

Należy zauważyć, że ze względu na niejednoznaczność argumentu mogliśmy popełnić błąd będący wielokrotnością 2π . Jednak ze względu na oszacowania

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}2 < \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}3 < \frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 < \pi,$$

co pokazuje, że otrzymany wynik jest poprawny (dodanie lub odjęcie 2π wyprowadziłoby go poza otrzymane powyżej oszacowania).

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $3\pi/4$.

1080. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx.$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{x+1}, \quad x = t^3 - 1$$

i formalnie

$$dx = 3t^2 dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=7$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 7]$ odpowiada przedziałowi $t \in [1, 2]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx = \int_1^2 \frac{4 \cdot (t^3 - 1)}{t^2} 3t^2 dt = 12 \cdot \int_1^2 t^3 - 1 dt = 12 \cdot \left(\frac{t^4}{4} - t \Big|_{t=1}^2 \right) =$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{16-1}{4} - (2-1) \right) = 12 \cdot \left(\frac{15}{4} - \frac{4}{4} \right) = 12 \cdot \frac{11}{4} = 33.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 33.

1081. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}.$$

Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} &= \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}, \\ 1 &= A \cdot (x+1) \cdot (x+2) + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x+1). \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości (\heartsuit) , a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B , C .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości (\heartsuit) kolejno $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 1 &= 2A, & \text{skąd} & \quad A = \frac{1}{2}, \\ 1 &= -B, & \text{skąd} & \quad B = -1, \\ 1 &= 2C, & \text{skąd} & \quad C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x} &= \int_1^6 \left(\frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \frac{\ln|x|}{2} - \ln|x+1| + \frac{\ln|x+2|}{2} \Bigg|_{x=1}^6 = \\ &= \frac{\ln 6}{2} - \ln 7 + \frac{\ln 8}{2} - \frac{\ln 1}{2} + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{2} - \ln 7 + \frac{3 \cdot \ln 2}{2} - 0 + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \\ &= 3 \cdot \ln 2 - \ln 7 = \ln 8 - \ln 7 = \ln \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\ln \frac{8}{7}$.

1082. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 50}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y = x + 1$ oraz $t = y/7$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 50} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 49} = \int \frac{dy}{y^2 + 49} = \int \frac{dy}{49(y/7)^2 + 49} = \int \frac{7 dt}{49t^2 + 49} = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\arctg t}{7} + C = \frac{\arctg(y/7)}{7} + C = \frac{\arctg((x+1)/7)}{7} + C. \end{aligned}$$

1083. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx .$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Sposób I: (rzemieślniczy)

Wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = x \cdot \sin x \Big|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0 - 0 - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0 ,$$

gdyż całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Sposób II: (pomysłowy)

Wykonując podstawienie $x = t + \pi$, czyli $t = x - \pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (t + \pi) \cos(t + \pi) \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} (t + \pi) \cos t \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt - \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt .$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że całka $\int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt$ jest równa 0 jako

całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, a całka $\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt$ jest równa 0 jako całka z cosinusa po pełnym okresie.

1084. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x} .$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x} &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x + 1)} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} \, dx = \ln|x| - \ln|x + 1| \Big|_{x=1}^{\infty} = \ln \left| \frac{x}{x + 1} \right| \Big|_{x=1}^{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x}{x + 1} \right| - \ln \frac{1}{2} = \ln \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + 1} \right| + \ln 2 = \ln|1| + \ln 2 = \ln 2 . \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\ln 2$.

1085. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+x^2} dx.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^4+x^2} &= \frac{1}{(x^2+1) \cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}, \\ 2x+1 &= (Ax+B) \cdot x^2 + C \cdot x \cdot (x^2+1) + D \cdot (x^2+1), \\ 2x+1 &= Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D, \\ &\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 2 &= C \\ 1 &= D \end{cases} \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $A = -2$ i $B = -1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+x^2} dx &= \int_{\sqrt{3}}^{\infty} -\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} dx = -\ln(x^2+1) - \arctg x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} \Big|_{x=\sqrt{3}}^{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-\arctg x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \ln 4 + \arctg \sqrt{3} - 2\ln \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \\ &= -\frac{\pi}{2} + 0 + \ln 1 + \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

1086. W każdym z zadań **1086.1-1086.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

$$\mathbf{1086.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\mathbf{1086.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = +\infty$$

$$\mathbf{1086.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{6}$$

$$\mathbf{1086.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{1086.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \mathbf{11}$$

$$\mathbf{1086.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{1086.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \mathbf{5}$$

$$\mathbf{1086.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{1086.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{36}$$

$$\mathbf{1086.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{45}$$

$$\mathbf{1086.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{49}$$

$$\mathbf{1086.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{1086.13.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{13}$$

$$\mathbf{1086.14.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{1086.15.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{63}$$

$$\mathbf{1086.16.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{70}$$

$$\mathbf{1086.17.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{73}$$

$$\mathbf{1086.18.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{7}$$

$$\mathbf{1086.19.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{1086.20.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{3}$$

1087. W każdym z zadań **1087.1-1087.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

Wobec tego:

$$\mathbf{1087.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{23/2}$$

$$\mathbf{1087.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = \mathbf{21/2}$$

$$\mathbf{1087.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{1/2}$$

$$\mathbf{1087.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{3/2}$$

$$\mathbf{1087.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{1/4}$$

$$\mathbf{1087.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{5/4}$$

$$\mathbf{1087.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{1087.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{1087.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+1}}) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{1087.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+2}}) = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{1087.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+1}}) = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{1087.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+2}}) = \mathbf{18}$$

$$\mathbf{1087.13.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+1}}) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{1087.14.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+2}}) = \mathbf{10}$$

1088. Rozstrzygnąć, czy wartość całki

$$\int_{160\,000}^{160\,001} 100 \cdot \ln x - \sqrt{x} \, dx = 798,292\,596\,921\,596\,397\dots$$

jest mniejsza czy większa od

$$400 \cdot \ln 20 - 400 - \frac{1}{3200} = 798,292\,596\,921\,596\,397\dots$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję podcałkową

$$f(x) = 100 \cdot \ln x - \sqrt{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{100}{x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{100}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} = \frac{-400 + \sqrt{x}}{4 \cdot x^2} > 0$$

dla $x > 160\,000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $[160\,000, \infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x > 160\,000$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x = 160\,000$. Ponieważ $f'(160\,000) = -1/1600$, dla $x > 160\,000$ zachodzi nierówność

$$f(x) > f(160\,000) - \frac{1}{1600} \cdot (x - 160\,000).$$

Szacując całkę przez pole trapezu ograniczonego od góry styczną do wykresu funkcji podcałkowej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{160\,000}^{160\,001} 100 \cdot \ln x - \sqrt{x} \, dx &> \frac{f(160\,000) + \left(f(160\,000) - \frac{1}{1600}\right)}{2} = f(160\,000) - \frac{1}{3200} = \\ &= 400 \cdot \ln 20 - 400 - \frac{1}{3200}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest większa od podanej liczby.

1089. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2}.$$

Wskazówka: Rozłożyć na ułamki proste.

Odpowiedź: $\frac{\pi^2}{6} - 1$.

1090. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(6n+1)^2} + \frac{1}{(6n+5)^2} \right).$$

Wskazówka: Wykazać, że suma danego szeregu jest równa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n)^2}.$$

Odpowiedź: $\frac{\pi^2}{9}$.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

$$1091. \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx = \frac{3\pi}{2}$$

$$1092. \int_0^{\sqrt{30}} \sqrt{30-x^2} dx = \frac{15\pi}{2}$$

$$1093. \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{6-x^2} dx = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

$$1094. \int_0^{\sqrt{15}} \sqrt{30-x^2} dx = \frac{15\pi}{4} + \frac{15}{2}$$

$$1095. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1096. \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{20-x^2} dx = \frac{5\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$1097. \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{28-x^2} dx = \frac{7\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$1098. \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1099. \int_0^{\sqrt{15}} \sqrt{20-x^2} dx = \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$1100. \int_0^{\sqrt{21}} \sqrt{28-x^2} dx = \frac{14\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{2}$$