Zadania do wybiórczego omówienia[1] na ćwiczeniach w piątek 16.06.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zadania powtórzeniowe.

1046. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^9} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^7}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(63)}(0)}{g^{(63)}(0)}\,.$$

1047. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^{12}} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^{10}}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(60)}(0)}{g^{(60)}(0)}\,.$$

1048. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^2}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

1049. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^3}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

1050. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{99n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\,.$$

1051. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{30n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4kn}}\,.$$

1052. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{9n}\frac{n}{k^2}\,.$$

[1] Osoby biorące udział w dodatkowym kolokwium 16.06.2023 rozwiązują zadania z tej listy samodzielnie. Osoby z grupy 1 nie biorące udziału w kolokwium powinny udać się na ćwiczenia do wybranej przez siebie grupy ćwiczeniowej.

1053. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \frac{n^2}{k^3} .$$

1054. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a, że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z=a+bi$.

Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b=0, \quad a\in$ ....

b) $b=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}, \quad a\in$ ....

c) $b=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a\in$ ....

d) $b=\frac{1}{2}, \quad a\in$ ....

1055. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, gdzie $0\leqslant a<b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)):\ x\in[a,b]\}$$

wokół osi OY (krzywa jest w płaszczyźnie XY) jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx .$$

Wyznaczyć pole powierzchni (fragmentu paraboloidy obrotowej)

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z\leqslant 7\right\} .$$

Wskazówka: Dana w zadaniu powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant ???$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ.

1056. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

1057. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

1058. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

1059. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\ldots+\frac{k^2}{n^3+k^3}+\ldots+\frac{4n^2}{n^3+8n^3}\right) .$$

1060. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \mathrm{arctg} x\, dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

1061. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

1062. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx$.

1063. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}} .$$

1064. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x)=|x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1)=-1$. Wyznaczyć $f(1)$.

1065. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

1066. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

1067. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}\, dx .$$

1068. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int\limits_1^e x^2 \cdot \ln x\, dx .$$

1069. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} .$$

1070. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=2 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} .$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{0,2,4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

1071. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}\, dx\,.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

1072. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-2}+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

1073. W każdym z zadań **1073.1-1073.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\|=\sup\{|f(x)|: x\in D_f\}$.

1073.1. $f(x)=x^2-5, \quad D_f=(-1,3), \quad \|f\|=$ ....

1073.2. $f(x)=x^3-15, \quad D_f=(-1,3), \quad \|f\|=$ ....

1073.3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}, \quad D_f=\mathbb{R}, \quad \|f\|=$ ....

1073.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}, \quad D_f=\mathbb{R}, \quad \|f\|=$ ....

1073.5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+7}, \quad D_f=\mathbb{R}, \quad \|f\|=$ ....

1074. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

1075. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+4}\,.$$

Wskazówka: $n^4+4=(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)$.

1076. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\frac{1}{121}-\frac{1}{144}+\frac{1}{169}-\ldots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

1077. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\,.$$

1078. Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=\int_1^x(\log_2 t-3)^{2017}\,dt\,.$$
Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

1079. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_0^5\frac{dx}{x^2-4x+5}\,,$$
a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

1080. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_0^7\frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx\,.$$
podając wynik w postaci liczby całkowitej.

1081. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_1^6\frac{dx}{x^3+3x^2+2x}\,.$$
Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

1082. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int\frac{dx}{x^2+2x+50}\,.$$

1083. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_0^{2\pi}x\cos x\,dx\,.$$
Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

1084. Obliczyć wartość całki niewłaściwej
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}\,.$$
lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

1085. Obliczyć wartość całki niewłaściwej
$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx\,.$$
Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

1086. W każdym z zadań **1086.1-1086.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

1086.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \dots\dots\dots\dots$	**1086.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \dots\dots\dots\dots$
1086.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \dots\dots$	**1086.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \dots\dots$
1086.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \dots$	**1086.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \dots$
1086.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \dots$	**1086.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \dots$
1086.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \dots\dots$	**1086.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) = \dots\dots$
1086.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) = \dots$	**1086.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2\right) = \dots$
1086.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2\right) = ..$	**1086.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2\right) = ..$
1086.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) = \dots$	**1086.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}\right) = \dots$
1086.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}\right) = ..$	**1086.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}\right) = ..$
1086.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}\right) = ..$	**1086.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}\right) = ..$

1087. W każdym z zadań **1087.1-1087.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n=\frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6\,.$$

Wobec tego:

1087.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ ....

1087.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+2})=$ ....

1087.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ ....

1087.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+2})=$ ....

1087.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ ....

1087.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ ....

1087.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ ....

1087.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+2}}\right)=$ ....

1087.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(9^{a_n}-9^{a_{n+1}}\right)=$ ....

1087.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(9^{a_n}-9^{a_{n+2}}\right)=$ ....

1087.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(16^{a_n}-16^{a_{n+1}}\right)=$ ....

1087.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(16^{a_n}-16^{a_{n+2}}\right)=$ ....

1087.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+48a_n}-\sqrt{1+48a_{n+1}}\right)=$ ....

1087.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+48a_n}-\sqrt{1+48a_{n+2}}\right)=$ ....

1088. Rozstrzygnąć, czy wartość całki

$$\int\limits_{160\,000}^{160\,001} 100\cdot\ln x-\sqrt{x}\,dx=798{,}292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

jest mniejsza czy większa od

$$400\cdot\ln 20-400-\frac{1}{3200}=798{,}292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

1089. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}\,.$$

Wskazówka: Rozłożyć na ułamki proste.

1090. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(6n+1)^2}+\frac{1}{(6n+5)^2}\right).$$

Wskazówka: Wykazać, że suma danego szeregu jest równa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n)^2}\,.$$

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

1091. $\int\limits_0^{\sqrt{6}}\sqrt{6-x^2}\,dx=$ ....

1092. $\int\limits_0^{\sqrt{30}}\sqrt{30-x^2}\,dx=$ ....

1093. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{6-x^2}\,dx=$ ....

1094. $\int\limits_0^{\sqrt{15}}\sqrt{30-x^2}\,dx=$ ....

1095. $\int\limits_0^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=$ ....

1096. $\int\limits_0^{\sqrt{5}}\sqrt{20-x^2}\,dx=$ ....

1097. $\int\limits_0^{\sqrt{7}}\sqrt{28-x^2}\,dx=$ ....

1098. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=$ ....

1099. $\int\limits_0^{\sqrt{15}}\sqrt{20-x^2}\,dx=$ ....

1100. $\int\limits_0^{\sqrt{21}}\sqrt{28-x^2}\,dx=$ ....
