

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach w PIĄTEK 7.06.2023.****Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!****Zespolone szeregi potęgowe.**

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

1039. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$$

1040. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{\sqrt{n}}$$

1041. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^{3n}}{\sqrt[3]{n}}$$

1042. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$$

1043. Zapewne pamiętacie, że suma wyrazów stojących w  $n$ -tym wierszu trójkąta Pascala jest równa  $2^n$ , a suma co drugiego wyrazu jest równa połowie tej liczby, czyli  $2^{n-1}$ . A ile jest równa suma<sup>1</sup> co trzeciego wyrazu  $n$ -tego wiersza trójkąta Pascala?

**Wskazówka:** Dodać sumy  $(1+z)^n$  dla<sup>2</sup>  $z \in \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right\}$ , przemnożone przez odpowiednie współczynniki.

1044. To samo pytanie dla sumy co czwartego wyrazu trójkąta Pascala.

**Poniżej jest zadanie dla koneserów.****Osoby walczące o zaliczenie przedmiotu.  
nie powinny w nie wkładać zbyt wiele energii.**

1045. Korzystając ze wzorów

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| \leq 1, z \neq 1$$

oraz

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

obliczyć<sup>3</sup> sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

**Wskazówka:** Dodać szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

dla  $z \in \left\{-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right\}$ , przemnożone przez odpowiednie współczynniki.

<sup>1</sup>Faktycznie są 3 takie sumy, zależnie od tego, od którego wyrazu zaczniemy.

<sup>2</sup>To są pierwiastki sześcienne z jedynki.

<sup>3</sup>Kiedyś już wyliczaliśmy tę sumę (przez całkowanie rzeczywistego szeregu potęgowego) i wtedy wyszło

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\ln 2}{3}.$$