Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 2.06.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Ciągi i szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych.

DEFINICJA: Ciąg (z_n) o wyrazach zespolonych jest zbieżny do granicy[1] g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |z_n-g|<\varepsilon\,.$$

Można przepisać większość torii zbieżności ciągów z przypadku rzeczywistego:
• suma, różnica, iloczyn, iloraz[2] ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym i granica sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu ciągów jest odpowiednio sumą, różnicą, iloczynem, ilorazem granic,
• zmiana skończenie wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność i granicę,
• $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$,
• jeżeli $|z|<1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} z^n=0$,
• jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=g$, to $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|g|$.

Niech

$$z_n=x_n+y_ni\,,$$

gdzie x_n, y_n są liczbami rzeczywistymi. Wówczas ciąg zespolony (z_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa**[3] ciągi rzeczywiste (x_n), (y_n) są zbieżne. W takim wypadku

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty} x_n+i\cdot\lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

Innymi słowy, zbieżność ciągu zespolonego sprowadza się do zbieżności dwóch ciągów rzeczywistych: ciągu części rzeczywistych oraz ciągu części urojonych.

Jeśli chodzi o **zespolone szeregi liczbowe,** to z teorii szeregów rzeczywistych przenoszą się następujące kryteria zbieżności:

• **Warunek konieczny zbieżności:** Jeżeli $z_n\not\to 0$, czyli $|z_n|\not\to 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest **rozbieżny.**

• **Zmiana wyrazów:** Zmiana lub pominięcie skończenie wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregu, ale może wpłynąć na wartość jego sumy.

• **Dodawanie/odejmowanie szeregów:** Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ są zbieżne, to zbieżne są szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n\pm w_n)$ i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z_n\pm w_n)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n\pm\sum_{n=1}^{\infty} w_n\,.$$

[1] Oczywiście g jest liczbą zespoloną.

[2] W przypadku ilorazu musimy zadbać o to, aby do mianownika nie dostało się zero. W szczególności granica mianownika musi być niezerowa.

[3] Jeśli jeden z ciągów (x_n), (y_n) jest rozbieżny, to ciąg (z_n) jest rozbieżny niezależnie od zachowania drugiego z tych ciągów.

• **Mnożenie przez stałą:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$. Jeśli te szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c\cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n \,.$$

• **Szereg geometryczny:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z|<1$. W takim przypadku

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz^n = \frac{cz}{1-z}\,.$$

• **Zbieżność bezwzględna:** Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny i wówczas

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|\,.$$

• **Kryterium d'Alemberta:** Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = g\in[0,\infty]$, to:
W przypadku $g<1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny oraz $z_n\to 0$.
W przypadku $g>1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny oraz $|z_n|\to\infty$.

• **Kryterium Cauchy'ego:** Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = g\in[0,\infty]$, to konkluzja jak wyżej.

Kryterium nie mające odpowiednika w teorii szeregów rzeczywistych:

• **Rozkład na części rzeczywistą i urojoną:** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_ni)$, gdzie x_n oraz y_n są rzeczywiste, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa** szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne. Jak się można spodziewać, w przypadku szeregów zbieżnych zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_ni) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\cdot\sum_{n=1}^{\infty} y_n\,.$$

• **Uogólnienie kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych:**

Niech w będzie taką liczbą zespoloną, że $|w|=1$ oraz $w\neq 1$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$$

jest zbieżny.

1019. Ciąg (z_n) o wyrazach zespolonych dany jest wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2+ni} - n\,.$$

Wyjaśnić, dlaczego powyższa definicja nie jest jednoznaczna i zaproponować możliwe sposoby jej doprecyzowania. Wybrać taki sposób jej doprecyzowania, aby podany ciąg był zbieżny i obliczyć jego granicę.

1020. To samo dla ciągu zespolonego danego wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2+2ni} + n\,.$$

Zbadać zbieżność zespolonych szeregów liczbowych[4]:

1021. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+in+1}$ **1022.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6+i}$ **1023.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5+i}$

1024. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+3i)^n}{\binom{2n}{n}}$ **1025.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+6i)^n}{\binom{3n}{n}}$ **1026.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+9i)^n}{\binom{4n}{n}}$

1027. Obliczyć sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}\,.$$

Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej kilka jego początkowych sum częściowych.

Zapisać szeregi (o wyrazach rzeczywistych) części rzeczywistych i urojonych jego wyrazów. Podać sumy tych szeregów (z jednej strony uzyskać je z sumy danego szeregu zespolonego, a z drugiej strony wyliczyć bezpośrednio).

1028. To samo dla szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}\,.$$

Zbadać zbieżność zespolonych szeregów liczbowych w zależności od parametru[5] zespolonego z. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór tych z, dla których szereg jest zbieżny.

1029. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ **1030.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{\sqrt{n}}$ **1031.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot z^{3n}}{\sqrt[3]{n}}$

1032. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{\sqrt[4]{n^2+1}\cdot(-4)^n}$ **1033.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{n}$ **1034.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{12n}}{n}$

[4] W ostatnim zadaniu można użyć kalkulatora do porównania pięciocyfrowych liczb całkowitych.

[5] Staram się unikać w tym momencie pojęcia "zespolony szereg potęgowy", które pojawi się na kolejnym wykładzie.

Poniższe zadanie jest przeznaczone do samodzielnej analizy (jego rozwiązanie jest wzorcem dla kolejnych dwóch zadań).

1035. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

1036. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a+b\cdot\cos x}{c+d\cdot\cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

1037. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{7^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a\cdot\sin x}{b+c\cdot\cos x},$$

gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi.

1038. Rozważmy następujący szereg zespolony z parametrem[6] z:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n\cdot 3^n}}{n}.$$

Obliczyć[7] sumę tego szeregu dla następujących wartości parametru[8]: $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}$, $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}$, $z=\cos\frac{\pi}{9}+i\cdot\sin\frac{\pi}{9}$, $z=\cos\frac{2\pi}{9}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{9}$ oraz $z=i$.

[6] Nadal unikam pojęcia "zespolony szereg potęgowy".

[7] *Przypomnienie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

[8] Dla uproszczenia zapisu można używać w rozwiązaniu oznaczenia

$$\cos x + i\cdot\sin x = e^{ix},$$

którego sens zostanie wkrótce wyjaśniony.