

**1004.** Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  okresowej o okresie  $2\pi$  określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu  $\sin n\pi$  czy  $\cos n\pi$ ).

*Rozwiązanie:*

Stosując wzory na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin nx \, dx = -\frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n\pi} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1 - (-1)^{n/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{(n/2)\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

**1005.** Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}.$$

Zakładając pełną beztróskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki  $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystamy z tego, że sinusy o różnych częstotliwościach są prostopadłe, czyli całka z ich iloczynu jest zerem:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{3^m} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin mx}{3^m} \, dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin nx}{3^n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{6^n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n} = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

**Uwaga:** Idea powyższych rachunków jest następująca: iloczyn skalarny dwóch wektorów jest sumą iloczynów odpowiednich współrzędnych – tutaj rolę współrzędnych spełniają współczynniki szeregu trygonometrycznego (z dokładnością do stałego czynnika).

W rozwiązaniu można też powołać się bezpośrednio na postać iloczynu skalarnego w bazie ortogonalnej sinusów i cosinusów.

**1006.** Obliczyć wartość sumy  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ . Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \, dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} \, dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx \, dx = (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx \, dx = (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2}.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

**Wskazówka:** Wykorzystać szereg Fouriera funkcji  $f(x) = e^{x\sqrt{2}}$  dla  $x \in (0, 2\pi)$ . Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsewala.

*Rozwiązanie:*

Na wstępie zauważmy, że na mocy podanych równości szereg Fouriera funkcji  $f$  okresowej z okresem  $2\pi$  i określonej na przedziale  $[0, 2\pi)$  wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{2}} & \text{dla } x \in (0, 2\pi) \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma współczynniki

$$a_0 = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{2\pi\sqrt{2}},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2},$$

a ponadto jest on punktowo zbieżny do funkcji  $f$ , gdyż  $f$  ma w punkcie nieciągłości wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

### Sposób I

Porównując wartość funkcji  $f$  w punkcie  $x=0$  z sumą jej szeregu Fouriera w tym punkcie otrzymujemy

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

czyli

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2} = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{2\pi\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2} - \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4 \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B - A}{4A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}.$$

### Sposób II

Korzystając z równości Parsevala:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

otrzymujemy

$$\frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2} \right)^2 + \left( (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2} \right)^2 \right),$$

co przepisujemy kolejno jako:

$$\frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} + 1)}{2\sqrt{2}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\sqrt{2}} &= \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\sqrt{2}} - \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{4\pi} &= \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4\pi} &= \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4 \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}B - A}{4A} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}. \end{aligned}$$

**1007.** Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

**Wskazówka:** Scalkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić  $x = \pi/2$ .

*Rozwiązanie:*

Rozważmy funkcję  $f$  będącą sumą szeregu funkcyjnego

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (1)$$

gdzie  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ , a więc  $f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ . Ponieważ szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

są zbieżne, szeregi funkcyjne  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  oraz  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  są zbieżne jednostajnie i w konsekwencji szereg (1) można różniczkować wyraz za wyrazem. Zatem dla  $x \in [0, 2\pi]$  mamy

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6},$$

skąd

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left( \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} + C.$$

Zauważmy, że ze wzoru (1) wynika  $f(0) = 0$ , skąd  $C = 0$  i w konsekwencji

$$f(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (2)$$

Przyjmując  $x = \pi/2$  we wzorze (2) otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{96} - \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^3}{12} = \pi^3 \cdot \frac{1-6+8}{96} = \pi^3 \cdot \frac{3}{96} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Odpowiedź:** Suma szeregu liczbowego podanego w treści zadania jest równa  $\pi^3/32$ .

**1008.** W każdym z zadań **1008.1-1008.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}, \quad D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

$$1008.1. \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{15}$$

$$1008.2. \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{24}$$

$$1008.3. \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$1008.4. \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$1008.5. \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{19}$$

$$1008.6. \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{39}$$

$$1008.7. \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{159}$$

$$1008.8. \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \frac{\pi}{49}$$

$$1008.9. \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{249}$$

$$1008.10. \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{\pi}{999}$$

**1009.** W każdym z zadań **1009.1-1009.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby  $\pi$ ).

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}, \quad C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n}, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n}, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

$$1009.1. \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{3}$$

$$1009.2. \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{8}$$

$$1009.3. \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{8}$$

$$1009.4. \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$1009.5. \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$1009.6. \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$1009.7. \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{11}$$

$$1009.8. \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{22}$$

$$1009.9. \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{79}$$

$$1009.10. \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \frac{\pi}{158}$$

$$1009.11. \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \frac{\pi}{316}$$

$$1009.12. \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = 0$$

$$1009.13. \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{2699}$$

$$1009.14. \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \frac{30\pi}{2699}$$

$$1009.15. \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \frac{\pi}{8097}$$

$$1009.16. \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{90\pi}{2699}$$

$$1009.17. \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \frac{\pi}{2699}$$

$$1009.18. \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \frac{30\pi}{2699}$$

$$1009.19. \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = 0$$

$$1009.20. \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = 0$$

$$1009.21. \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = 0$$

**1010.** W każdym z zadań **1010.1-1010.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

**Wskazówka:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2 + 1 - 2p \cdot \cos x}$  dla  $p > 1$ .

**1010.1.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{\pi}{4}$

**1010.2.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{2\pi}{9}$

**1010.3.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{\pi}{8}$

**1010.4.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{2\pi}{27}$

**1010.5.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{\pi}{16}$

**1010.6.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{2\pi}{81}$

**1010.7.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{13 - 5 \cos x} = \frac{2\pi}{25}$

**1010.8.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{17 - 8 \cos x} = \frac{\pi}{16}$

**1010.9.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x)^2} = \frac{\pi}{12}$

**1010.10.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x)^2} = \frac{\pi}{18}$

**1010.11.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x)^2} = \frac{\pi}{150}$

**1010.12.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(17 - 8 \cos x)^2} = \frac{\pi}{240}$

**1010.13.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (5 - 3 \cos x)} = \frac{\pi}{15}$

**1010.14.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x) \cdot (17 - 8 \cos x)} = \frac{\pi}{190}$

**1010.15.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \frac{\pi}{45}$

**1010.16.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \frac{2\pi}{105}$