

## Najważniejsze definicje i twierdzenia związane z szeregami Fouriera.

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji<sup>1</sup>:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

Iloczyn skalarny w języku bazy<sup>2</sup> ortogonalnej sinusów i cosinusów:

Jeżeli

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx),$$

to

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n).$$

**Równość Parsevala:**

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi \cdot a_0^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

**Szereg Fouriera funkcji<sup>3</sup> f:**

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (F)$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad (F0)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \quad (FA)$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx dx. \quad (FB)$$

Przy założeniach, które są spełnione przez używane przez nas funkcje, szereg Fouriera (F) jest punktowo zbieżny do funkcji f.

<sup>1</sup>Nie precyzujemy dokładnie, jak regularne mają być funkcje. Na pewno muszą być okresowe o okresie  $2\pi$ .

<sup>2</sup>To nie jest baza w sensie algebry liniowej, bo potrzebujemy przejścia granicznego do wysumowania szeregu.

<sup>3</sup>Okresowej o okresie  $2\pi$ , w punktach nieciągłości mającej wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

**Kolokwium nr 7:** czwartek 1.06.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. **561**–1018.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek **26.05.2023**.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

### Szeregi trygonometryczne.

**1004.** Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  okresowej o okresie  $2\pi$  określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu  $\sin n\pi$  czy  $\cos n\pi$ ).

**1005.** Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}.$$

Zakładając pełną beztróskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki  $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ .

**1006.** Obliczyć wartość sumy  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$ . Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx dx = \left( e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx dx = \left( e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2}.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

**Wskazówka:** Wykorzystać szereg Fouriera funkcji  $f(x) = e^{x\sqrt{2}}$  dla  $x \in (0, 2\pi)$ . Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsewala.

**1007.** Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

**Wskazówka:** Scałkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić  $x = \pi/2$ .

**1008.** W każdym z zadań **1008.1-1008.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n},$$

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

**1008.1.**  $\int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

**1008.2.**  $\int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

**1008.3.**  $\int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

**1008.4.**  $\int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

**1008.5.**  $\int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$

**1008.6.**  $\int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$

**1008.7.**  $\int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

**1008.8.**  $\int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$

**1008.9.**  $\int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

**1008.10.**  $\int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

**1009.** W każdym z zadań **1009.1-1009.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby  $\pi$ ).

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}, \quad C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n}, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n}, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

$$1009.1. \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.2. \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.3. \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.4. \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.5. \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.6. \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.7. \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.8. \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.9. \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.10. \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.11. \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.12. \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.13. \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.14. \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.15. \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.16. \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.17. \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.18. \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.19. \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.20. \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$1009.21. \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

**1010.** W każdym z zadań **1010.1-1010.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

**Wskazówka:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2 + 1 - 2p \cdot \cos x}$  dla  $p > 1$ .

**1010.1.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$       **1010.2.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

**1010.3.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$       **1010.4.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

**1010.5.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$       **1010.6.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

**1010.7.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{13 - 5 \cos x} = \dots\dots\dots$       **1010.8.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{17 - 8 \cos x} = \dots\dots\dots$

**1010.9.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$       **1010.10.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

**1010.11.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$       **1010.12.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(17 - 8 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

**1010.13.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (5 - 3 \cos x)} = \dots\dots\dots$

**1010.14.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x) \cdot (17 - 8 \cos x)} = \dots\dots\dots$

**1010.15.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \dots\dots\dots$

**1010.16.**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \dots\dots\dots$

W kolejnych pięciu zadaniach zakładamy, że funkcja  $f$  jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym  $f$  jest sumą swojego szeregu Fouriera.

**1011.** Dowieść, że jeśli  $f$  jest funkcją okresową o okresie  $\pi$ , to w jej szeregu Fouriera  $a_n = b_n = 0$  dla  $n$  nieparzystych.

**1012.** Dowieść, że jeśli  $f$  jest funkcją okresową o okresie  $\frac{\pi}{2}$ , to w jej szeregu Fouriera  $a_n = b_n = 0$  dla  $n$  niepodzielnych przez 4.

**1013.** Dowieść, że jeśli  $f$  jest funkcją okresową o okresie  $2\pi/3$ , to w jej szeregu Fouriera  $a_n = b_n = 0$  dla  $n$  niepodzielnych przez 3.

**1014.** Dowieść, że jeśli  $f$  jest funkcją okresową o okresie  $2\pi/5$ , to w jej szeregu Fouriera  $a_n = b_n = 0$  dla  $n$  niepodzielnych przez 5.

**1015.** Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  okresowa o okresie  $2\pi$ . Dowieść, że  $f$  spełnia dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  równość

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy .....  
<<< podać warunek w języku współczynników szeregu Fouriera funkcji  $f$  >>>

**1016.** Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

stosując wzór Parsewala do

$$f(x) = e^x$$

na  $(0, 2\pi)$  oraz wstawiając  $x=0$  do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

**1017.** Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$$

wstawiając  $x=0$  do szeregu Fouriera funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = \cos(x\sqrt{2})$$

na  $(0, 2\pi)$ .

**1018.** Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

używając

$$f(x) = x(\pi - |x|)$$

na  $(-\pi, \pi)$ .