

**Zadania do omówienia na wykładzie w środę 24.05.2023  
i części wykładu w czwartek 25.05.2023.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami !!!**

### Ciągi i szeregi funkcyjne.

#### Podsumowanie najważniejszych wiadomości o normie supremum i zbieżności jednostajnej:

Normą supremum funkcji  $f$  nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|.$$

#### Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji  $(f_n)$  określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji  $f$  określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako  $f_n \rightrightarrows f$ , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Jeżeli ciąg  $(f_n)$  funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$ , to  $f$  jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg  $(f_n)$  funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$ , a ciąg pochodnych  $(f'_n)$  jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $g$ , to funkcja  $f$  jest różniczkowalna i przy tym  $f' = g$ .

Szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych  $(S_n)$  określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ , to szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli  $\|f_n\| \not\rightarrow 0$ , to szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  mają ciągłe pochodne, a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji  $f$  zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

$$977. f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$979. f(x) = x^2, \quad D_f = (-1, 2)$$

$$981. f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$983. f(x) = \sin x + \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$978. f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$980. f(x) = x^3, \quad D_f = (-4, 3)$$

$$982. f(x) = \operatorname{arctg} \sin x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$984. f(x) = x^3 - x, \quad D_f = (-1, 1)$$

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji  $f$  zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie<sup>1</sup>.

$$985. f(x) = \frac{7x^4 + 11x^2 + 13}{2x^4 + 3x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$987. f(x) = \frac{2^x + 5^x + 8^x}{2^x + 4^x + 8^x}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$989. f(x) = \int_0^x \frac{\sin t \, dt}{t^2 + 1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$986. f(x) = \frac{11x^4 - 7x^2 + 13}{3x^4 - 2x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$988. f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^4 + 1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$990. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x^4}{n^2 + n}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

991. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

992. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3 + 8}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

993. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

994. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

<sup>1</sup>**Wskazówka do niektórych zadań:**

Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach  $|x| < 1$  i  $|x| \geq 1$

**995.** Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin nx + \cos n^2 x}{n^8 + 88}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie.

**996.** Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{2020} x}{2^n}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

**997.** W każdym z zadań **997.1-997.15** podaj normę supremum funkcji  $f$  o podanym wzorze i dziedzinie.

**997.1.**  $f(x) = 7 \sin x$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.2.**  $f(x) = 7 \sin x - 3$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.3.**  $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.4.**  $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.5.**  $f(x) = \log_2 x - 2$ ,  $D_f = \left(\frac{1}{8}, 8\right)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.6.**  $f(x) = \log_2 x - 2$ ,  $D_f = (2, 32)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.7.**  $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$ ,  $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.8.**  $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$ ,  $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.9.**  $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$ ,  $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.10.**  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.11.**  $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.12.**  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.13.**  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.14.**  $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**997.15.**  $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

**998.** Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11}.$$

**999.** Dany jest szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o sumie  $F$ , gdzie funkcje  $f_n$  są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną  $m$ , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja  $F$  jest  $m$ -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k \leq m$  zachodzi równość  $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ .

**1000.** Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^3 \cdot x)}{n^{20}}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią  $k$  udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  jest jednostajnie zbieżny, ale szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

**1001.** Dany jest szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o sumie  $F$ , gdzie funkcje  $f_n$  są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\cos n^8 x}{n^{60}}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną  $m$ , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja  $F$  jest  $m$ -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k \leq m$  zachodzi równość  $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ .

**1002.** Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią  $k$  udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  jest jednostajnie zbieżny, ale szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

**1003.** Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią  $k$  udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  jest jednostajnie zbieżny, ale szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.