Kolokwium nr 6: czwartek 18.05.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 561–976.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 12.05.2023.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Liczby zespolone i ich zastosowanie do wyprowadzania tożsamości trygonometrycznych.

937. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

jeśli $b\neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań:

938. $\overline{z}=z^2$ **939.** $\overline{z}=z^{-1}$ **940.** $1+i=z^2$ **941.** $3+4i=z^2$ **942.** $z^2\overline{z}=8i$

943. $-3+4i=z^2$ **944.** $z^2+z=i$ **945.** $z^2+iz=1$ **946.** $z=\overline{z}+1$

947. $\begin{cases} z_1^2=z_2 \\ z_2^2=z_1 \end{cases}$ **948.** $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=1 \\ z_1+z_2=-1 \end{cases}$ **949.** $\begin{cases} z_1+iz_2=1 \\ z_2+iz_1=2 \end{cases}$ **950.** $\begin{cases} z_1+\overline{z_2}=1 \\ \overline{z_1}+z_2=i \end{cases}$

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej:

951. $\mathrm{Re}z+\mathrm{Re}z^2\geqslant 0$ **952.** $3|z|\leqslant|z^2|+1$ **953.** $|z|=|\overline{z}+1|$

954. $|z+i|\leqslant|z-i|$ **955.** $\mathrm{Im}\dfrac{z}{z^2+1}=0$ **956.** $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z}=0$

957. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD, punkt A jest środkiem odcinka PC, punkt B jest środkiem odcinka AC. Punkt E leży na prostej PD, przy czym

$$\sphericalangle PQA+\sphericalangle PQB+\sphericalangle PQC=\sphericalangle PQD+\sphericalangle PQE\,.$$

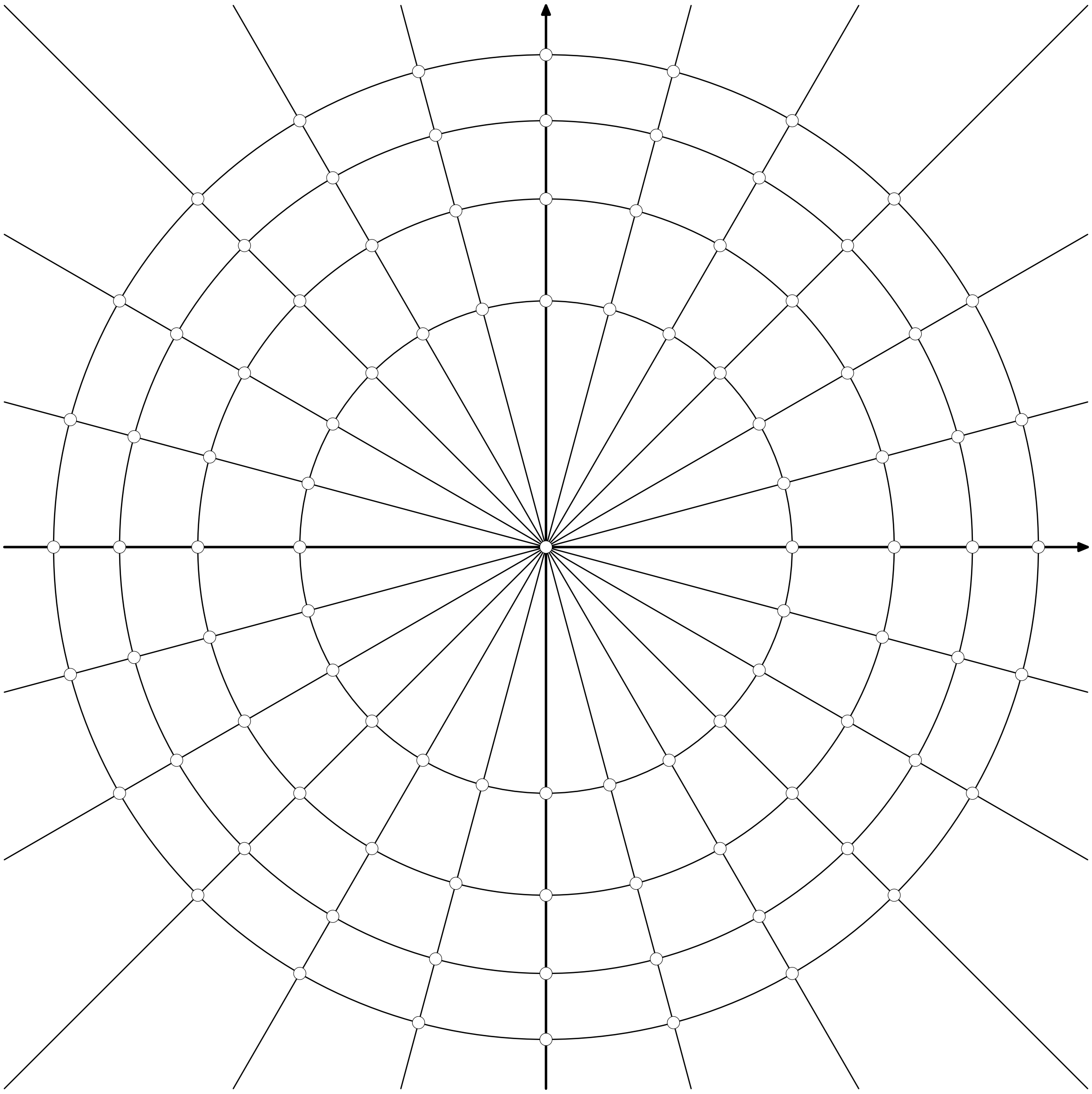
Obliczyć PE.

958. Rozwiązać równanie $z^5=1$ bez użycia funkcji trygonometrycznych.
Wskazówka: $z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2+az+1)(z^2+bz+1)$
Wyjaśnić, czemu wskazówka zadziałała.
Na podstawie uzyskanego rozwiązania równania podać wartości sinusa i cosinusa dla odpowiednich (ciekawych) kątów.

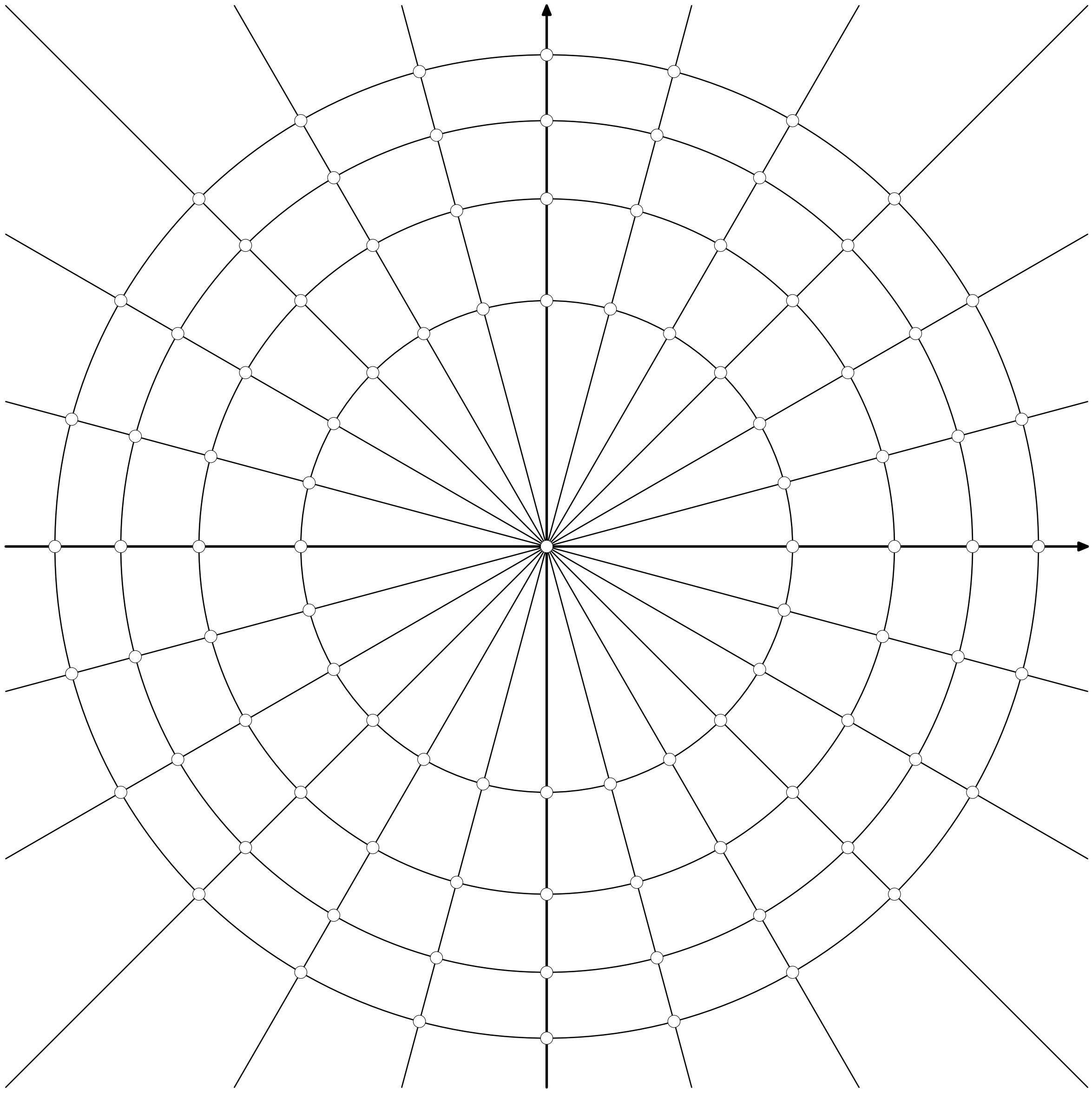
Uprościć wyrażenia (w uproszczonej formie nie może występować więcej niż jeden symbol *arctg*):

959. $\mathrm{arctg}3+\mathrm{arctg}7$ **960.** $\mathrm{arctg}2+\mathrm{arctg}8$ **961.** $\mathrm{arctg}5+\mathrm{arctg}8$

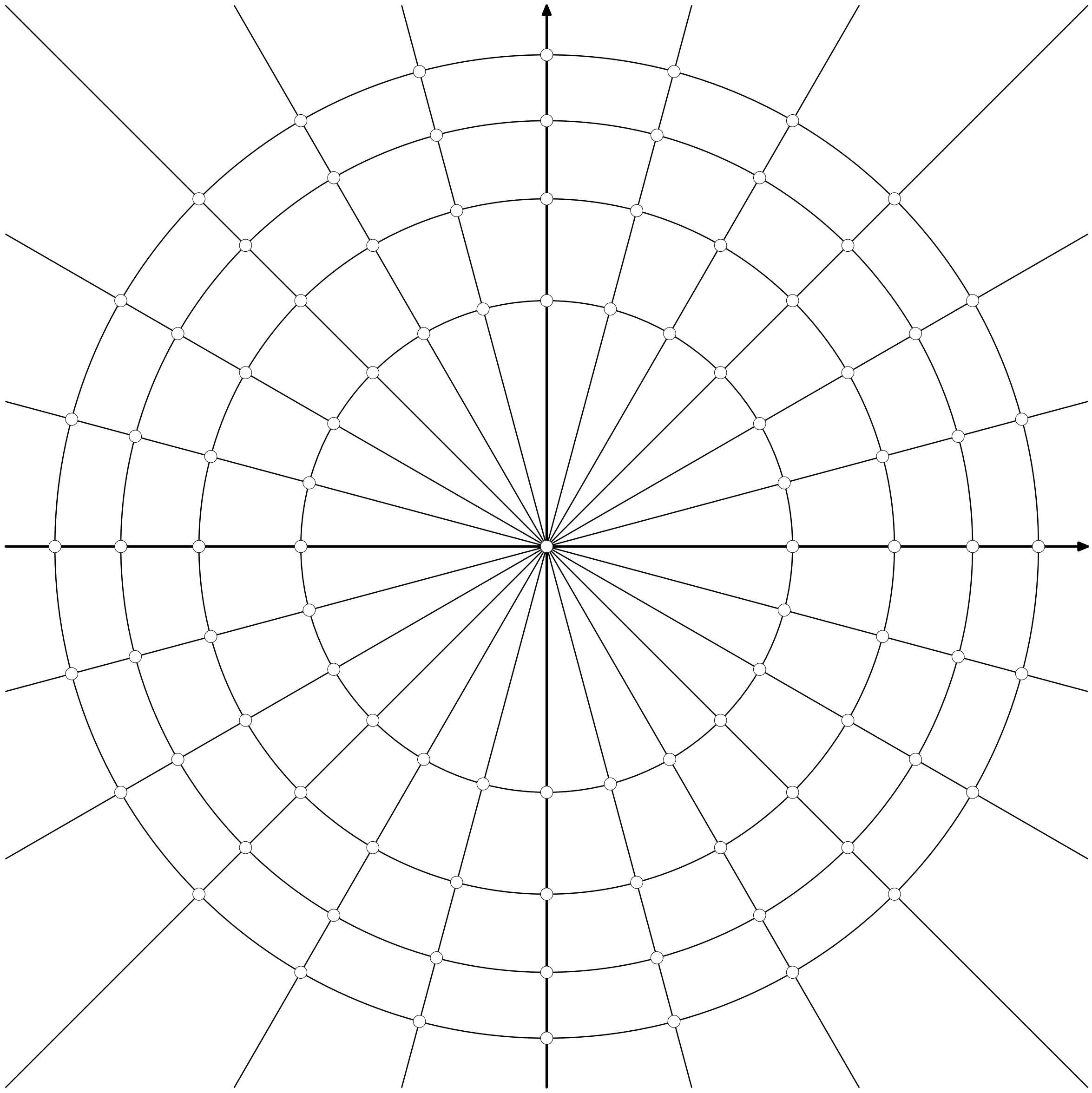
962. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4=-4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



963. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9 = 27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



964. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7+4z^3=8z^4+32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



965. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi} \sin^7 x\, dx\,.$$

Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

966. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/6} \cos^6 x\, dx\,.$$

967. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \sin^8 x\, dx\,.$$

968. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

969. Udowodnić nierówność

$$\int_0^{4\pi} \cos^{10} x\, dx < \pi\,.$$

970. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

a ponadto $f(0)=f(\pi)=0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

971. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<7$, że

$$\int_a^7 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

972. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci w albo $w\cdot\sqrt{p}$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, a p jest liczbą pierwszą.

a) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx =$ ....

b) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \sin^3 x\,dx =$ ....

c) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx =$ ....

d) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx =$ ....

973. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich parametru p, dla których podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-1|>|z-3|$.

a) $z=\log_2 p+i\cdot\log_3 p$, ...

b) $z=\log_3 p+i\cdot\log_5 p$, ...

c) $z=\log_5 p+i\cdot\log_7 p$, ...

d) $z=\log_7 p+i\cdot\log_2 p$, ...

974. Niech $z=1-i$. Podaj w postaci kartezjańskiej:

a) $z^7=$ ....

b) $z^8=$ ....

c) $z^9=$ ....

d) $z^{10}=$ ....

975. Niech $z=\sqrt{3}+i$. Podaj część rzeczywistą potęgi liczby z:

a) $\mathrm{Re}\left(z^5\right)=$ ....

b) $\mathrm{Re}\left(z^6\right)=$ ....

c) $\mathrm{Re}\left(z^7\right)=$ ....

d) $\mathrm{Re}\left(z^8\right)=$ ....

976. Podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\overline{z}=z^{-1}$.

a) $z=\frac{2}{3}+ai$, $a=$ ....

b) $z=\frac{3}{5}+ai$, $a=$ ....

c) $z=\frac{1}{4}+ai$, $a=$ ....

d) $z=\frac{4}{5}+ai$, $a=$ ....