Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 5.05.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szeregi potęgowe.

Początkowe 4 zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

917. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}.$$

918. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}.$$

919. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}.$$

920. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{(n!)^n}.$$

---

921. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}.$$

922. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

923. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n \cdot 64^n} \cdot x^{3n}}{5n+7}.$$

924. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+2)^n\cdot x^n}{(7n+3)^n}\,.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

925. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{22}\cdot e^{x^7}\,.$$

Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k=50, 51, 52, \ldots, 60$.

926. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x\neq 0$ wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-\sum\limits_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}\,.$$

Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

927. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\,.$$

Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\,.$$

W tym celu zastanowić się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

928. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\text{..........................}=\text{..........................}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$

dla $a=$.........., $b=$.........., $c=$.......... otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\text{..}\,. \tag{2}$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=$....... Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(......)=......\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(......)=\text{..}+C=$$

$$=\text{..}+C\,.$$

Stąd

$$C=\text{..}$$

i ostatecznie

$$f(x)=\text{..}\,. \tag{3}$$

Przyjmując $x=$...... we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(......)=\text{..}=$$

$$=\text{..}=$$

$$=\text{..}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....

929. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}\,.$$

930. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x=1$.

931. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

932. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n \cdot x^{3n}}{(81n+2)^n}\,.$$

933. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \cdot x^n\,,$$

gdzie (L_n) jest ciągiem Lucasa:

$$L_0=2, \quad L_1=1, \quad L_n=L_{n-2}+L_{n-1} \ \text{ dla } \ n\geqslant 2$$

lub równoważnie

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\,.$$

934. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n\,.$$

935. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\,.$$

936. Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot(n+1)}\,.$$

Wyliczyć wartość sumy szeregu na końcach przedziału zbieżności.