Kolokwium nr 5: czwartek 4.05.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 561–916.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 28.04.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szeregi o wyrazach dowolnego znaku.

Początkowych 7 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

875. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} .$$

876. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+2} .$$

877. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} .$$

878. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100} .$$

879. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) .$$

880. Wiedząc, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 ,$$
obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{2}+\frac{1}{201}+\frac{1}{203}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{4}+\frac{1}{401}+\frac{1}{403}+\ldots+\frac{1}{599}-\frac{1}{6}+$$
$$+\frac{1}{601}+\frac{1}{603}+\ldots+\frac{1}{799}-\frac{1}{8}+\frac{1}{801}+\frac{1}{803}+\ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{10}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1003}+\ldots$$

881. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$
w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

882. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, oblicz jego sumę.

$$(\mathbf{A})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{7n+10} \qquad (\mathbf{B})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{3n^2+n} \qquad (\mathbf{C})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+n}$$

$$(\mathbf{D})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+1} \qquad (\mathbf{E})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n^2+1)}{77n-1} \qquad (\mathbf{F})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{2011n+2012}$$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)
X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

883. $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

884. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

885. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

886. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

887. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p^2-3\right)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(p^2-5)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(p^2-8)^n}{n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(p^2-10)^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in$ ....

888. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z, R, N**:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) ....

b) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ ....

c) ciągu (b_n) ....

d) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$ ....

e) ciągu (a_n+b_n) ....

f) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ....

g) ciągu (c_n+d_n) ....

h) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)$ ....

i) ciągu (a_n+c_n) ....

j) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+c_n)$ ....

k) ciągu (a_n+d_n) ....

l) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+d_n)$ ....

m) ciągu (b_n+c_n) ....

n) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n+c_n)$ ....

o) ciągu (b_n+d_n) ....

p) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n+d_n)$ ....

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

889. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n > 0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

890. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

891. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

892. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leqslant 100$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

893. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

894. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

895. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

896. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

897. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

898. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

---

899. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

900. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot a^n}{n!\cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

901. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+2)^n}$ **902.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$ **903.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$

904. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

905. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+10^{10}}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Rozstrzygnąć, które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne. Wskazać wśród poniższych przykładów dwa szeregi, jeden zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, drugi rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, o ilorazie wyrazów a_n/b_n dążącym do 1.

906. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **907.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\cdot 3^n}$ **908.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$

909. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$ **910.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$ **911.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$

912. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **913.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$ **914.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)(-1)^n$

915. $1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\ldots-\frac{1}{k}+\ldots$ (k razy)

916. $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-\ldots-\frac{1}{k^2}+\ldots$ (k razy)

Kryteria zbieżności szeregów.

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównawcze.

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka wzorcowych szeregów.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a.

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. Kryterium Cauchy'ego.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. Kryterium d'Alemberta dla ciągów.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

8. Kryterium Cauchy'ego dla ciągów.

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1$, to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

9. Zbieżność bezwzględna.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

10. Szeregi naprzemienne.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1}$$

jest zbieżny[1].

[1] Równie dobrze można podać tu szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$.