

**811.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{0 + x^8}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo  $4 - \pi < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + 0}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4,5-\pi}} < +\infty,$$

bo  $4,5 - \pi > 1$ .

**812.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} = \int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} + \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_0^1 \frac{x^e dx}{0 + x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}} < +\infty,$$

bo  $3 - e < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-e}} < +\infty,$$

bo  $4 - e > 1$ .

**813.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{3x^3 + x^3}}{\sqrt[3]{0 + x^7}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}} < +\infty,$$

bo  $5/6 < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 3x^5}}{\sqrt[3]{x^{11} + 0}} dx = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} < +\infty,$$

bo  $7/6 > 1$ .

**814.** Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $p$ , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx$$

jest zbieżna.

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx = \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru  $p$  całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{0 + x^3}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}} < +\infty,$$

o ile  $3/2 - p < 1$ , czyli  $p > 1/2$ .

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx \geq \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{x^3+x^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-p}} = +\infty,$$

o ile  $3/2 - p \geq 1$ , czyli  $p \leq 1/2$ .

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx \leq \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+0}} dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-p}} < +\infty,$$

o ile  $2 - p > 1$ , czyli  $p < 1$ .

Ponadto

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}} dx \geq \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^4}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-p}} = +\infty,$$

o ile  $2 - p \leq 1$ , czyli  $p \geq 1$ .

Wniosek: Jeżeli  $1/2 < p < 1$ , to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

**Odpowiedź:** Podana całka jest zbieżna dla  $p \in (1/2, 1)$ .

**815.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^\infty \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx$$

i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

*Rozwiązanie:*

Zauważamy, że liczby 0 i 1 są miejscami zerowymi wielomianu sześciennego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej, skąd otrzymujemy

$$x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x-1) \cdot (x+2).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{5x-2}{x \cdot (x-1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

$$5x-2 = A \cdot (x-1) \cdot (x+2) + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x-1).$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A$ ,  $B$  i  $C$ , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach  $x$ 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za  $x$  wartości 0, 1 i  $-2$  otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=0 \quad -2 = -2A, \quad \text{skąd } A=1,$$

$$\text{dla } x=1 \quad 3 = 3B, \quad \text{skąd } B=1,$$

$$\text{dla } x=-2 \quad -12 = 6C, \quad \text{skąd } C=-2.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_4^{\infty} \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx &= \int_4^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} dx = \ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2| \Big|_{x=4}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2|) \right) - \ln 4 - \ln 3 + 2 \cdot \ln 6 = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \\ &= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} \right) + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3 > \ln e = 1. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość  $\ln 3 > 1$ .

**Uwaga:** Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+2|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

**816.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}.$$

Doprowadzić wynik do postaci  $\ln w$ , gdzie  $w$  liczbą wymierną dodatnią.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x \cdot (16x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{16x^2 + 1},$$

$$1 = A \cdot (16x^2 + 1) + (Bx + C) \cdot x,$$

$$1 = 16Ax^2 + A + Bx^2 + Cx,$$

$$1 = A, \quad 0 = C, \quad 0 = 16A + B,$$

$$A = 1, \quad B = -16, \quad C = 0.$$

Wobec tego<sup>1</sup>

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (16x^2 + 1)} = \int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{16x}{16x^2 + 1} dx = \left( \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln(16x^2 + 1) \right) \Big|_{x=1/3}^{\infty} =$$

<sup>1</sup>Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

$$\begin{aligned}
&= \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2+1}} \Big|_{x=1/3}^{\infty} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{16x^2+1}} \right) - \ln \sqrt{\frac{1/9}{\frac{16}{9}+1}} = \ln \sqrt{\frac{1}{16}} - \ln \sqrt{\frac{1}{16+9}} = \\
&= \ln \frac{1}{4} - \ln \frac{1}{5} = \ln \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość  $\ln \frac{5}{4}$ .

**Uwaga:** Całki

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_{1/3}^{\infty} \frac{x}{16x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(16x^2+1)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

**Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.**

**817.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{(x^2+1) \cdot x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x},$$

$$1 = (Ax+B) \cdot x + C \cdot (x^2+1),$$

$$1 = Ax^2 + Bx + Cx^2 + C,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B \\ 1 &= C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy  $A = -1$ .

Wobec tego

$$\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3+x} = \int_7^{\infty} -\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln|x| \Big|_{x=7}^{\infty} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln x \right) \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \\
&= \left( \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+x^{-2}}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \ln 1 + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \frac{\ln 50}{2} - \ln 7.
\end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 50}{2} - \ln 7$ .

**Uwaga:** Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uznanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym.

**818.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{x^3-4x} &= \frac{3x+2}{(x-2) \cdot x \cdot (x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2}, \\
3x+2 &= A \cdot x \cdot (x+2) + B \cdot (x-2) \cdot (x+2) + C \cdot (x-2) \cdot x. \quad (\heartsuit)
\end{aligned}$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ( $\heartsuit$ ), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A, B, C$ .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ( $\heartsuit$ ) kolejno  $x=2, x=0, x=-2$  otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned}
8 &= 8A, & \text{skąd} & \quad A = 1, \\
2 &= -4B, & \text{skąd} & \quad B = -\frac{1}{2}, \\
-4 &= 8C, & \text{skąd} & \quad C = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
\int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx &= \int_6^{\infty} \frac{1}{x-2} - \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2} dx = \ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \Bigg|_{x=6}^{\infty} = \\
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2} \right) \right) - \ln 4 + \frac{\ln 6}{2} + \frac{\ln 8}{2} = \\
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-2 \cdot \ln 4 + \ln 6 + \ln 8}{2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x \cdot (x+2)}} \right) + \frac{-4 \cdot \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 + 3 \cdot \ln 2}{2} = \\
&= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \right) + \frac{\ln 3}{2} = \ln 1 + \frac{\ln 3}{2} = 0 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}.
\end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 3}{2}$ .

**819.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x^3-9x} &= \frac{2x+3}{(x-3) \cdot x \cdot (x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}, \\
2x+3 &= A \cdot x \cdot (x+3) + B \cdot (x-3) \cdot (x+3) + C \cdot (x-3) \cdot x. \quad (\heartsuit)
\end{aligned}$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości  $(\heartsuit)$ , a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A, B, C$ .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości  $(\heartsuit)$  kolejno  $x=3, x=0, x=-3$  otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned}
9 &= 18A, \quad \text{skąd} \quad A = \frac{1}{2}, \\
3 &= -9B, \quad \text{skąd} \quad B = -\frac{1}{3}, \\
-3 &= 18C, \quad \text{skąd} \quad C = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx &= \int_5^{\infty} \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/3}{x} - \frac{1/6}{x+3} dx = \frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \Big|_{x=5}^{\infty} = \\
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln|x-3|}{2} - \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln|x+3|}{6} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 8}{6} = \\
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 5}{3} + \frac{\ln 2}{2} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2 \cdot (x+3)}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \\
&= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^3}{1 + \frac{3}{x}}} \right) + \frac{\ln 5}{3} = \ln 1 + \frac{\ln 5}{3} = 0 + \frac{\ln 5}{3} = \frac{\ln 5}{3}.
\end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 5}{3}$ .

**820.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci  $w \cdot \ln \frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q$  są liczbami pierwszymi, a  $w$  liczbą wymierną dodatnią.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5},$$

$$1 = A \cdot (x+2) \cdot (x+5) + B \cdot x \cdot (x+5) + C \cdot x \cdot (x+2).$$

Podstawiamy<sup>2</sup> za  $x$  wartości 0,  $-2$  i  $-5$  otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=0 \quad 1 = 10 \cdot A, \quad \text{skąd} \quad A = 1/10,$$

$$\text{dla } x=-2 \quad 1 = -6 \cdot B, \quad \text{skąd} \quad B = -1/6,$$

$$\text{dla } x=-5 \quad 1 = 15 \cdot C, \quad \text{skąd} \quad C = 1/15.$$

Wobec tego<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)} &= \int_4^{\infty} \frac{1/10}{x} - \frac{1/6}{x+2} + \frac{1/15}{x+5} dx = \\ &= \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln|x| - 5 \cdot \ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x+5|) \Big|_{x=4}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln|x| - 5 \cdot \ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x+5|) \right) \right) - \frac{1}{30} \cdot (3 \cdot \ln 4 - 5 \cdot \ln 6 + 2 \cdot \ln 9) = \\ &= \frac{1}{30} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^3 \cdot (x+5)^2}{(x+2)^5} \right) - \frac{1}{30} \cdot (6 \cdot \ln 2 - 5 \cdot \ln 2 - 5 \cdot \ln 3 + 4 \cdot \ln 3) = \\ &= \frac{1}{30} \cdot \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{5}{x}\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^5} \right) - \frac{1}{30} \cdot (\ln 2 - \ln 3) = \frac{1}{30} \cdot \ln 1 + \frac{1}{30} \cdot (\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{30} \cdot \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość  $\frac{1}{30} \cdot \ln \frac{3}{2}$ .

<sup>2</sup>Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A, B$  i  $C$ , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach  $x$ 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

<sup>3</sup>Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.



**Uwaga:** Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+5} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+2|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+5|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartości całek zbieżnych.

$$821. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \text{Rozbieżna}$$

$$822. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$823. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \text{Rozbieżna}$$

$$824. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$825. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{1001/1000}} = \frac{1000}{1000 \sqrt{\ln 2}}$$

$$826. \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \text{Rozbieżna}$$

$$827. \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} = \frac{1}{\ln \ln 3}$$

$$828. \int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$829. \int_0^{\infty} x^8 \cdot \sin x^9 dx = \text{Rozbieżna}$$

$$830. \int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = 20$$

$$831. \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$832. \int_1^{\infty} \sqrt{x} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$833. \int_{-1}^1 x^{-43/45} dx = 0$$

$$834. \int_{-1}^1 x^{-47/45} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$835. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{99}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = \text{Rozbieżna}$$

$$836. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{97}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} dx = 0$$