

Kolokwium nr 4: czwartek 20.04.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 616–841.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 14.04.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Całki niewłaściwe.

Początkowe 10 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

811. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

812. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

813. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

814. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx$$

jest zbieżna.

815. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

816. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3 + x}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie w liczbą wymierną dodatnią.

817. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

818. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

819. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^{\infty} \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

820. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+5)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \ln \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w liczbą wymierną dodatnią.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartości całek zbieżnych.

821. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \dots\dots\dots$

822. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \dots\dots\dots$

823. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \dots\dots\dots$

824. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \dots\dots\dots$

825. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{1001/1000}} = \dots\dots\dots$

826. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \dots\dots\dots$

827. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} = \dots\dots\dots$

828. $\int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$

829. $\int_0^{\infty} x^8 \cdot \sin x^9 dx = \dots\dots\dots$

830. $\int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \dots\dots\dots$

831. $\int_0^1 \ln x \, dx = \dots\dots\dots$

832. $\int_1^{\infty} \sqrt{x} \, dx = \dots\dots\dots$

833. $\int_{-1}^1 x^{-43/45} \, dx = \dots\dots\dots$

834. $\int_{-1}^1 x^{-47/45} \, dx = \dots\dots\dots$

835. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{99}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} \, dx = \dots\dots\dots$

836. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{97}}{x^{100} + x^{66} + x^{44} + 1} \, dx = \dots\dots\dots$

837. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^8 + x^7}} \, dx$$

jest zbieżna.

838. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{24}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+3) \cdot (x+8)}.$$

839. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{15}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+10) \cdot (x+12) \cdot (x+30)}.$$

840. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{(2x+1) \cdot (2x+7) \cdot (5x+7)}.$$

841. Rozważamy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^x}{t^{10} + 1} \, dt.$$

- Wyznaczyć dziedzinę funkcji f .
- Dowieść, że f jest funkcją wypukłą.
- Dowieść, że wykres funkcji f jest symetryczny względem pewnej prostej pionowej.
- Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji f .

Wskazówki:

- Wykonać podstawienie $s = 1/t$.
- Udowodnić nierówność między średnimi ważonymi (doprecyzować założenia):

$$a^w \cdot b^{1-w} \leq wa + (1-w)b.$$

Zastosować ją do funkcji podcałkowych.