773. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale $[0,1]$ wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Wobec tego[1]

$$\int_0^1 x^3\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\right)=\frac{1}{4}\,.$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{1}=\frac{1}{4}\,.$$

774. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Najpierw pokażę, w jaki sposób można naiwnie próbować rozwiązać to zadanie i dlaczgo to się nie udaje.

Dla funkcji ciągłej $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ i ciągu podziałów przedziału na równe części, interesujący nas wzór ogólny przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Wobec tego

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)\,.$$

[1]Korzystamy po drodze ze wzoru $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Trudnością, jaką napotykamy w tym momencie, jest brak wzoru, który pozwoliłby wyrazić sumę

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}$$

w prostej postaci pozwalającej na przejście graniczne.

No cóż, naiwnie sądziliśmy, że najłatwiej będzie wybrać możliwie najprostszy ciąg podziałów przedziału całkowania, a mianowicie podziały na równe części. Ale co nam z tego, że sam podział jest ładny, skoro funkcja podcałkowa w punktach podziału przyjmuje wartości wykluczające zwinięcie otrzymanej sumy do prostej postaci.

Musimy więc zmienić nasze priorytety. Nieważne, czy przedzialiki podziału są równe, czy nie. Przede wszystkim wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału muszą być możliwie najprostsze. Ponieważ w rozważanym przykładzie funkcją podcałkową jest pierwiastek kwadratowy, punktami podziału powinny być liczby, których pierwiastki kwadratowe są liczbami wymiernymi, a jeszcze lepiej, jeśli nie będą to byle jakie liczby wymierne chaotycznie rozmieszczone, ale liczby wymierne tworzące w miarę regularny ciąg[2], na przykład ciąg arytmetyczny.

To prowadzi do pomysłu, aby za punkty n-tego podziału przyjąć kwadraty liczb wymiernych tworzących skończony ciąg arytmetyczny. Oczywiście taki, aby zerowy punkt podziału był lewym, a n-ty prawym końcem przedziału całkowania, czyli

$$x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2}\,.$$

Zastosowanie ma wersja z ciągiem podziałów, gdzie n-ty podział jest podziałem na n niekoniecznie równych części, a y-ki są w prawych końcach przedziałów podziału:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big((x_{n,k}-x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \Big)\,. \qquad (\clubsuit)$$

W naszym wypadku

$$a=0, \qquad b=1, \qquad f(x)=\sqrt{x}, \qquad x_{n,k}=\frac{k^2}{n^2}\,,$$

skąd po podstawieniu powyższych danych do wzoru ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{k^2}{n^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{2k-1}{n^2} \right) \cdot \frac{k}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(2k^2-k\right) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \left(2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3} - \frac{n\cdot(n+1)}{2} \right) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{2n^2} \right) = \frac{2}{3}\,.$$

[2]Tu mamy na myśli ciąg skończony, ale słowo "skończony" pomijamy, aby nie zaburzać płynności i tak już rozbudowanego zdania.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}\,.$$

---

775. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale [0, 1] wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Wobec tego[3]

$$\int_0^1 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} 2^{k/n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot 2^{1/n}\cdot\frac{\left(2^{1/n}\right)^n-1}{2^{1/n}-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot 2^{1/n}\cdot\frac{2-1}{2^{1/n}-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{1/n}}{2^{1/n}-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2^{1/n}\cdot\frac{1/n}{2^{1/n}-1}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1} = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1}\,.$$

Jeżeli istnieje granica (funkcji)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-1}\,,$$

to istnieje również granica (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1}$$

i są one równe. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2^x\cdot\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

i tyle właśnie wynosi wartość szukanej całki.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\,.$$

[3]Korzystamy po drodze ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.

776. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{(k/n)^3}{5(k/n)^4+1}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

gdzie $f(x)=\dfrac{x^3}{5x^4+1}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\frac{x^3}{5x^4+1}\,dx=\frac{1}{20}\cdot\int_0^2\frac{20x^3}{5x^4+1}\,dx=$$

$$=\left.\frac{\ln(5x^4+1)}{20}\right|_{x=0}^{2}=\frac{\ln 81-\ln 1}{20}=\frac{4\ln 3}{20}=\frac{\ln 3}{5}\,,$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\ln|g(x)|+C\,.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}=\frac{\ln 3}{5}\,.$$

777. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,\,\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right):\ x\in[0,\,15]\right\}\,.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}$ na przedziale $[a,\,b]=[0,\,15]$ otrzymujemy:

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^{15}\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\int_0^{15}\sqrt{1+x}\,dx=\left.\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}\right|_{x=0}^{15}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot(64-1)=\frac{2}{3}\cdot 63=42\,.$$

Odpowiedź:

Dana w zadaniu krzywa ma długość 42.

778. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,\,g:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x)\leqslant g(x)$$

dla każdego $x\in[a,\,b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x,\,y):\ x\in[a,\,b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\dfrac{X}{P},\,\dfrac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y=x^2$ i prostą o równaniu $y=x$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu parabola i prosta przecinają się w punktach $(0,\,0)$ i $(1,\,1)$, a przy tym $x^2\leqslant x$ dla $x\in[0,\,1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a,\,b]=[0,\,1]$, $f(x)=x^2$ oraz $g(x)=x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X=\int_0^1 x\cdot\left(x-x^2\right)\,dx=\int_0^1 x^2-x^3\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\,,$$

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 x^2-x^4\,dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{10}\bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5-3}{30}=\frac{1}{15}\,,$$

$$P=\int_0^1 x-x^2\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\,.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości danej figury to $X/P=(1/12)/(1/6)=1/2$ oraz $Y/P=(1/15)/(1/6)=(2/5)$.

Odpowiedź:

Środek ciężkości danej figury leży w punkcie $(1/2,\,2/5)$.

779. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2+y^2=1$$

wokół osi OY.

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x,\,f(x)):x\in[a,\,b]\}$, gdzie $0\leqslant a<b$ oraz $f\in C^1([a,\,b])$, wokół osi OY jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C$.

Rozwiązanie:

Przekształcanie równania obracanego okręgu prowadzi kolejno do:

$$y^2=1-(x-2)^2\,,$$
$$y=\pm\sqrt{1-(x-2)^2}\,.$$

Przy tym x może przebiegać przedział $[1,3]$.

Okrąg rozdziela się więc w naturalny sposób na dwa półokręgi, o równaniach

$$y=\sqrt{1-(x-2)^2} \quad \text{oraz} \quad y=-\sqrt{1-(x-2)^2}\,.$$

Ponieważ każdy z tych półokręgów tworzy przy obrocie powierzchnię obrotową o takim samym polu, możemy wyliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót jednego z nich, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2.

Aby skorzystać z podanego wzoru, przyjmujemy $[a,b]=[1,3]$ i $f(x)=\sqrt{1-(x-2)^2}$. Wówczas

$$f'(x)=\frac{-(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,.$$

Zatem szukane pole jest równe

$$2\cdot 2\pi\cdot\int_1^3 x\cdot\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}\,dx\,.$$

Obliczamy je wykonując podstawienie $t=x-2$:

$$2\cdot 2\pi\cdot\int_1^3 x\cdot\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}\,dx=4\pi\cdot\int_{-1}^1 (t+2)\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt=4\pi\cdot\int_{-1}^1 (t+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=$$

$$=4\pi\cdot\int_{-1}^1 t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt+8\pi\cdot\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$$

Ponieważ pierwsza całka w ostatniej sumie jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera[4], kontynuujemy obliczanie drugiej całki[5]:

$$8\pi\cdot\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=8\pi\cdot\arcsin t\Big|_{t=-1}^{1}=8\pi\cdot(\arcsin 1-\arcsin(-1))=8\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)=8\pi^2\,.$$

Odpowiedź: Pole torusa jest równe $8\pi^2$.

Uwaga: Nieprzypadkowo pole torusa jest iloczynem długości obracanego okręgu przez drogę zakreślaną przy obrocie przez środek (czyli środek ciężkości) tego okręgu (twierdzenie Pappusa-Guldina).

780. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant\frac{1}{3}\right\}\,.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

[4]Ponieważ jest to całka niewłaściwa, trzeba udowodnić jej zbieżność, najlepiej korzystając z kryterium porównawczego.

[5]Druga całka też jest niewłaściwa, ale tu akurat nie wpływa to na tok rachunków.

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{(x,\,y):\ \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s,\,0,\,0)$, gdzie

$$x_s=\frac{\pi\cdot\int\limits_{1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}{\pi\cdot\int\limits_{1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}\,.$$

Obliczamy:

$$\int\limits_{1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{1/3}^{1} x-x^3\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\bigg|_{x=1/3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{1}{324}=\frac{162-81-18+1}{324}=\frac{64}{324}=\frac{16}{81}$$

oraz

$$\int\limits_{1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{1/3}^{1} 1-x^2\,dx=x-\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=1/3}^{1}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{81}=\frac{81-27-27+1}{81}=\frac{28}{81}\,,$$

skąd

$$x_s=\frac{16/81}{28/81}=\frac{4}{7}\,.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{4}{7},\,0,\,0\right)$.

W każdym z kolejnych dwunastu zadań podaj **w postaci uproszczonej** wartość granicy ciągu.

781. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+k}+\ldots+\frac{1}{6n}\right)=\mathbf{ln\ 3}$

782. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+6}+\ldots+\frac{1}{n+2k}+\ldots+\frac{1}{9n}\right)=\mathbf{ln\ 3}$

783. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+8}+\frac{1}{n+12}+\ldots+\frac{1}{n+4k}+\ldots+\frac{1}{81n}\right)=\mathbf{ln\ 3}$

784. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{7n}{50n^2}\right)=\mathbf{ln\ 5}$

785. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{2n^2+k^2}+\ldots+\frac{5n}{27n^2}\right)=\mathbf{ln\ 3}$

786. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^2+1}+\frac{2}{3n^2+4}+\ldots+\frac{k}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{3n}{12n^2}\right)=\mathbf{\ln 2}$

787. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{2n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

788. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{4n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{3}}}$ $\quad\left(=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{18}}\right)$

789. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{3\cdot\sqrt{3}}}$ $\quad\left(=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{9}}\right)$

790. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{3}}}$

791. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{20}+2^{20}+3^{20}+...+n^{20}}{n^{21}}=\mathbf{1/21}$

792. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+...+\frac{n}{(2n)^2}\right)=\mathbf{1/2}$

---

803. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?

Odpowiedź: Wszystkie plastry zawierają tyle samo skórki.

804. Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?

Odpowiedź: Pole ograniczone okręgiem nie zależy od promienia sfery, a jedynie od rozwarcia cyrkla użytego do narysowania okręgu. Takie samo jest pole koła narysowanego na płaszczyźnie. Pole całej sfery jest równe polu koła o promieniu równym średnicy sfery – na sferze rysujemy to tak: nóżka cyrkla w jednym biegunie, ołówek ślizga się po drugim biegunie. Natomiast półsfera powstaje przez umieszczenie nóżki na biegunie i narysowanie równika – zastanów się jaki jest wówczas rozstaw cyrkla i sprawdź, że pole się zgadza.

805. Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

Odpowiedź: W połowie wysokości.

806. Gdzie leży środek ciężkości półkuli?

Odpowiedź: W 3/8 wysokości.

807. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-3}+\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)^k}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\ldots+\sqrt[3]{n-3}+\sqrt[3]{n-2}+\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{n}\right)^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych k i m, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości $n^{3/2}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/2}$.

Zauważmy, że

$$n^{-3/2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0,1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_{x=0}^{1}=\frac{2}{3}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości $n^{4/3}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/3}$.

Zauważmy, że

$$n^{-4/3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{i}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja g jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0,1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=\left.\frac{3x^{4/3}}{4}\right|_{x=0}^{1}=\frac{3}{4}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}\right)^k}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[3]{i}\right)^m}=\lim_{n\to\infty}\left(n^{3k/2-4m/3}\cdot\frac{\left(n^{-3/2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}\right)^k}{\left(n^{-4/3}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[3]{i}\right)^m}\right)=\frac{(2/3)^k}{(3/4)^m},$$

o ile $3k/2=4m/3$, czyli $k=8$ i $m=9$.

Dla tych wartości k i m szukana granica jest równa

$$\frac{2^8\cdot 4^9}{3^8\cdot 3^9}=\frac{2^{26}}{3^{17}}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2^{26}/3^{17}$ dla $k=8$ i $m=9$.

808. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,\,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x)\leqslant g(x)$$

dla każdego $x\in[a,b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x,y):\ x\in[a,b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X=\int\limits_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx\,, \qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx\,, \qquad P=\int\limits_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$

Wyznaczyć środek ciężkości (x_n, y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y=x$ i krzywą o równaniu $y=|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ oraz $y_G=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu krzywa i prosta przecinają się w punktach $(0,0)$ i $(1,1)$, a przy tym $|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}\leqslant x$ dla $x\in[0,1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a,b]=[0,1]$, $f(x)=x^{(n+1)/n}$ oraz $g(x)=x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X=\int\limits_0^1 x\cdot\left(x-x^{(n+1)/n}\right)\,dx=\int\limits_0^1 x^2-x^{(2n+1)/n}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^{(3n+1)/n}}{(3n+1)/n}\Bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{n}{3n+1}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot(3n+1)}\,,$$

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 x^2-x^{2(n+1)/n}\,dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^{(3n+2)/n}}{2\cdot(3n+2)/n}\Bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{6}-\frac{n}{2\cdot(3n+2)}=\frac{1}{3\cdot(3n+2)}\,,$$

$$P=\int\limits_0^1 x-x^{(n+1)/n}\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^{(2n+1)/n}}{(2n+1)/n}\Bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2\cdot(2n+1)}\,.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości figury Z_n to

$$x_n=\frac{X}{P}=\frac{2\cdot(2n+1)}{3\cdot(3n+1)} \qquad \text{oraz} \qquad y_n=\frac{Y}{P}=\frac{2\cdot(2n+1)}{3\cdot(3n+2)}\,.$$

Wobec tego $x_G=y_G=4/9$.

Dla bardzo dużych n obszar Z_n jest nieznacznie pogrubionym odcinkiem o końcach $(0,0)$ i $(1,1)$, więc należy oczekiwać, że jego środek ciężkości leży bardzo blisko tego odcinka. W konsekwencji **należy oczekiwać, że $\boldsymbol{x_G=y_G}$.**

809. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant-\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{(x,y):\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s, 0, 0)$, gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int\limits_{-1/3}^{1} x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx}{\pi \cdot \int\limits_{-1/3}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx} .$$

Obliczamy:

$$\int\limits_{-1/3}^{1} x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int\limits_{-1/3}^{1} x - x^3\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=-1/3}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162-81-18+1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81}$$

oraz

$$\int\limits_{-1/3}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int\limits_{-1/3}^{1} 1 - x^2\, dx = x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-1/3}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{81-27+27-1}{81} = \frac{80}{81} ,$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5} .$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)$.

810. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x, x^{3/2}\right) :\ x \in [0, 13]\right\} .$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)=x^{3/2}$ na przedziale $[a, b] = [0, 13]$ otrzymujemy:

$$\int\limits_{a}^{b} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = \int\limits_{0}^{13} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int\limits_{0}^{13} \sqrt{1+\frac{9}{4}\cdot x}\, dx = \frac{8\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot x+1\right)^{3/2}}{27}\Bigg|_{x=0}^{13} =$$

$$= \frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{9\cdot 13+4}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{117+4}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{121}{4}\right)^{3/2} - 1\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{1331}{8} - 1\right) = \frac{1331-8}{27} = \frac{1323}{27} = \frac{1350-27}{27} = \frac{\frac{2700}{2}-27}{27} = \frac{100}{2} - 1 = 49 .$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu krzywa ma długość 49.