741. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$, czyli $x=\left(t^2-1\right)^2$ i formalnie $dx=4\left(t^3-t\right)\,dt$, otrzymujemy

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\int_1^2 \frac{4\left(t^3-t\right)\,dt}{t}=4\cdot\int_1^2 t^2-1\,dt=\left.\frac{4t^3}{3}-4t\right|_{t=1}^{2}=\frac{32}{3}-8-\frac{4}{3}+4=\frac{28}{3}-4=\frac{16}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 16/3.

742. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}\,, \qquad (*)$$

$$1=(Ax+B)\cdot x^2+C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)+D\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$1=Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D\,,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 0 &= C \\ 1 &= D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=0$ oraz $B=-1$.

Wobec tego

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}=\int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\,dx=\left.-\mathrm{arctg}x-\frac{1}{x}\right|_{x=1}^{\sqrt{3}}=-\mathrm{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{arctg}1+1=$$

$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+1=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$.

743. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonamy podstawienie
$$t=\sqrt[3]{4x^5-3}\,,$$
czyli
$$t^3=4x^5-3$$
oraz formalnie
$$3t^2\,dt=20x^4\,dx\,,$$
zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x\in[1,\,2]$ odpowiada przedział $t\in[1,\,5]$.

Otrzymujemy
$$\int_1^2\frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5\frac{t^2\,dt}{1+t}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5\frac{(t+1)\cdot(t-1)+1}{1+t}\,dt=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5 t-1+\frac{1}{1+t}\,dt=$$
$$=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\Bigg|_{t=1}^{5}\right)=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{25}{2}-5+\ln6-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)=\frac{3}{20}\cdot(8+\ln3)=$$
$$=\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln3}{20}\,.$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln3}{20}$.

744. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_{-1}^{0}x\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx$$
podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie
$$t=\sqrt[3]{x+1},\qquad x=t^3-1$$
i formalnie
$$dx=3t^2\,dt.$$
Ponadto $x=-1$ odpowiada $t=0$, a $x=0$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-1,\,0]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy
$$\int_{-1}^{0}x\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int_0^1\left(t^3-1\right)\cdot t\cdot3t^2\,dt=3\cdot\int_0^1 t^6-t^3\,dt=3\cdot\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=$$
$$=3\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)=3\cdot\frac{4-7}{28}=3\cdot\frac{-3}{28}=-\frac{9}{28}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-9/28$.

745. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} = \int_0^{2} \frac{6t^5\,dt}{t^3+2t^2} = 6\cdot\int_0^{2} \frac{t^3\,dt}{t+2} = 6\cdot\int_0^{2} \frac{t^3+8}{t+2} - \frac{8}{t+2}\,dt = 6\cdot\int_0^{2} t^2-2t+4-\frac{8}{t+2}\,dt =$$

$$= 2t^3-6t^2+24t-48\ln|t+2|\,\Bigg|_{t=0}^{2} = 16-24+48-48\ln 4+48\ln 2 = 40-48\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $40-48\ln 2$.

746. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b, że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2-14x+50} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2-14x+50} = \int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2+1}\,,$$

a następnie wykonujemy podstawienie $t=x-7$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2+1} = \int_{a-7}^{b-7} \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\,\Bigg|_{t=a-7}^{b-7} = \operatorname{arctg}(b-7)-\operatorname{arctg}(a-7)\,.$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2}\,,$$

skąd wynika, że warunki zadania będą spełnione, jeżeli przyjmiemy $b-7=1$ i $a-7=-1$.

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $a=6$ i $b=8$.

747. Podać wartość całki

$$\int_{-2021}^{2021} x^{2021}\cdot\left(x^{666}+1\right)^{777}\cdot \sin\sin\cos\sin\sin x^{2021}\,dx\,.$$

Całka ma wartość 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

748. Która całka ma większą wartość

$$\int_{-2022}^{0} x^{2022}\cdot\left(x^{666}+1\right)^{777}\cdot\sin\sin\cos\sin\sin x^{2021}\,dx$$

czy

$$\int_{0}^{2022} x^{2022}\cdot\left(x^{666}+1\right)^{777}\cdot\sin\sin\cos\sin\sin x^{2021}\,dx\ ?$$

Funkcja podcałkowa jest parzysta, skąd wynika, że podane całki są równe.

749. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{1}^{2}\sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}+\sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,dx\,.$$

Wskazówka: Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,,$$

a następnie przedstawić daną całkę w postaci pola odpowiedniej figury.

Rozwiązanie:

Niech $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,.$$

Zauważmy, że $f(1)=1$ oraz $f(2)=2$, a ponadto przekształcanie równania $y=f(x)$ prowadzi kolejno do

$$y=\sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,,\qquad y^2=\frac{3x^3+4}{7}\,,\qquad 7y^2=3x^3+4\,,$$

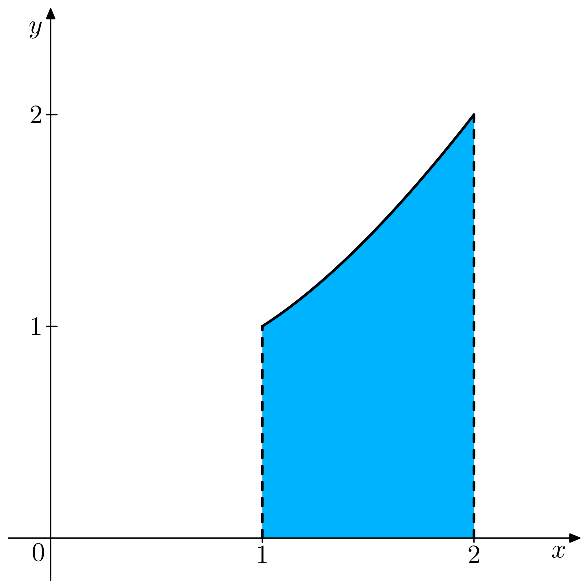
$$7y^2-4=3x^3\,,\qquad \frac{7y^2-4}{3}=x^3\,,\qquad \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}=x\,.$$

Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać

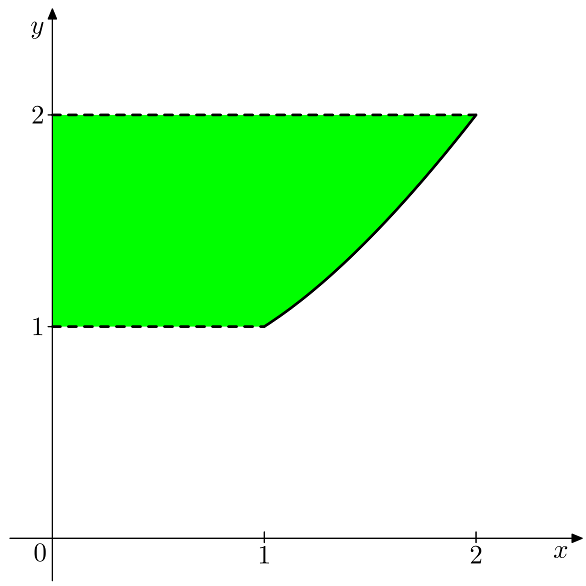
$$\int_{1}^{2} f(x)+f^{-1}(x)\,dx\,,$$

gdzie $f^{-1}:[1,2]\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f określoną wzorem

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,.$$



rys. 1



rys. 2

Całka

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\,dx$$

jest polem figury

$$\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}=\left\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}\right\}$$

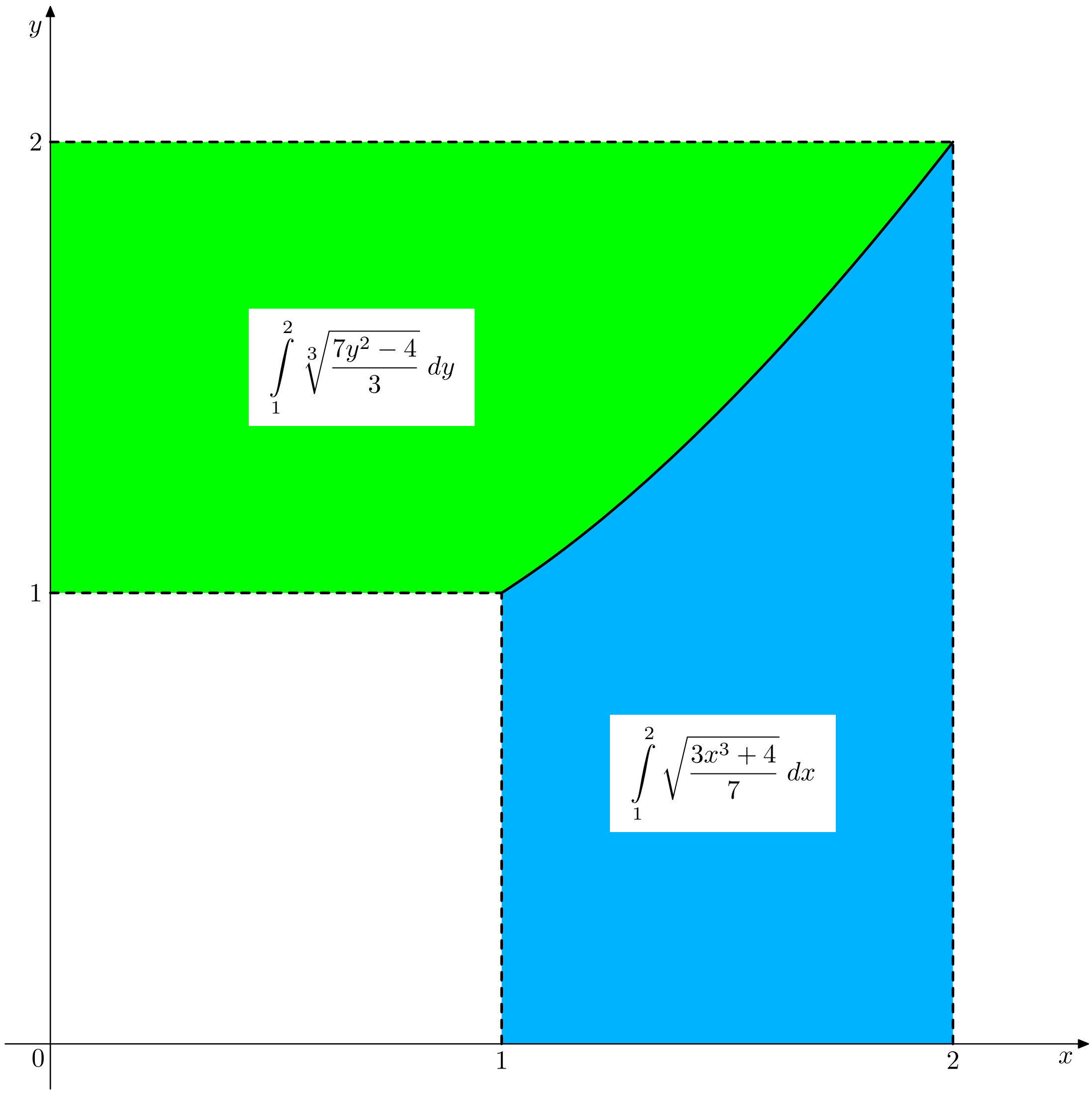
zamalowanej na rysunku 1 kolorem niebieskim.

Z kolei na rysunku 2 kolorem zielonym zamalowana jest figura

$$\left\{(x,y):\ 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant f^{-1}(y)\right\}=\left\{(x,y):\ 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}\right\},$$

której pole jest równe

$$\int_1^2 f^{-1}(y)\,dy=\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}}\,dy=\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}\,dx\,.$$



rys. 3

Dana w zadaniu całka ma więc wartość równą polu figury zamalowanej na rysunku 3. Ponieważ zamalowana figura jest sumą trzech kwadratów jednostkowych, jej pole jest równe 3.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 3.

750. Rozstrzygnąć, która całka jest większa:

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}}\,dx \qquad \text{czy} \qquad \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}\,dx \quad ?$$

Rozwiązanie:

Niech $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=\sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}\,.$$

Wówczas $f(1)=g(1)=2$ oraz $f(2)=g(2)=1$, a co więcej funkcje f i g są na przedziale $[1, 2]$ malejące i odwrotne do siebie.

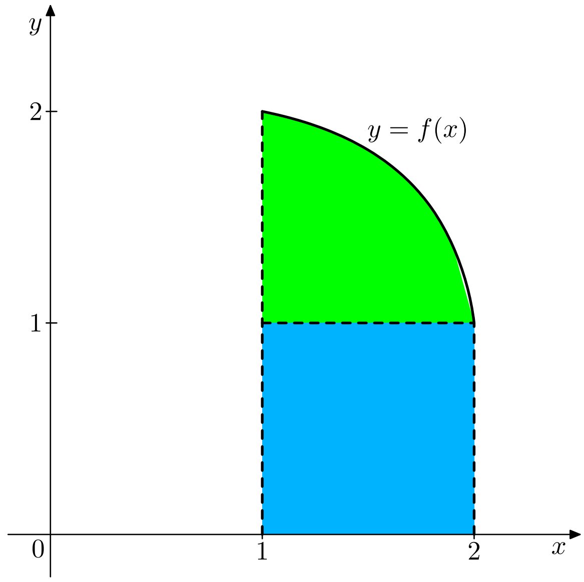
Całka

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}}\, dx = \int_1^2 f(x)\, dx$$

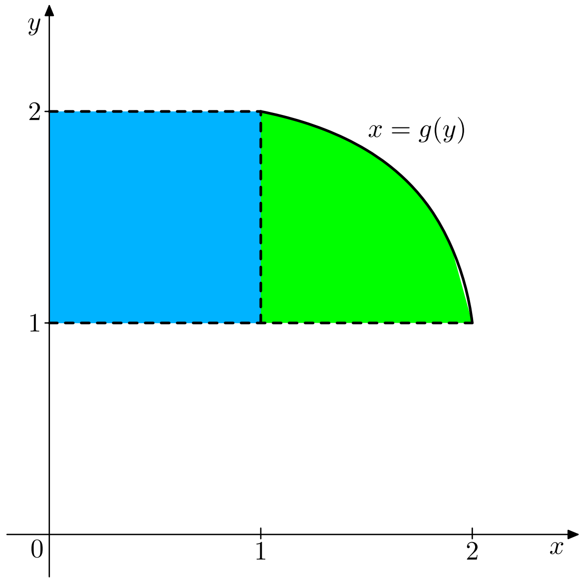
jest równa polu figury

$$\{(x, y):\ 1\leqslant x\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

zamalowanej na rysunku 4.



rys. 4



rys. 5

Z kolei całka

$$\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}\, dx = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7y^4}{15}}\, dy = \int_1^2 g(y)\, dy$$

jest równa polu figury

$$\{(x, y):\ 1\leqslant y\leqslant 2\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant g(y)\}$$

zamalowanej na rysunku 5.

Ponieważ każda z tych figur składa się z kwadratu jednostkowego (niebieskiego) oraz tego samego trójkąta krzywoliniowego (zielonego), pola obu figur są równe.

Odpowiedź: Podane całki są równe.

751. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$, czyli $x=t^6-2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5-6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\,dx = \int_1^{\sqrt[3]{2}} t^2\cdot\left(6t^5-6t^2\right)\,dt = \int_1^{\sqrt[3]{2}} 6t^7-6t^4\,dt = \frac{3t^8}{4}-\frac{6t^5}{5}\Bigg|_{t=1}^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{4}-\frac{12\cdot\sqrt[3]{4}}{5}-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$, czyli $x=t^6+2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5+6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{0} t^2\cdot\left(6t^5+6t^2\right)\,dt = \int_{-1}^{0} 6t^7+6t^4\,dt = \frac{3t^8}{4}+\frac{6t^5}{5}\Bigg|_{t=-1}^{0} =$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}=\frac{9}{20}\,.$$

Ponadto

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \frac{3\cdot(x-1)^{4/3}}{4}\Bigg|_{x=0}^{1} = -\frac{3}{4}$$

W konsekwencji

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}-\frac{3}{4}+\frac{9}{20}\right)=\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\frac{3}{40}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\frac{3}{40}$.