W każdym z poniższych 25 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

698. $\int\limits_{2020}^{2023} 7\,dx = \mathbf{21}$

699. $\int\limits_{0}^{3} x^2\,dx = \mathbf{9}$

700. $\int\limits_{0}^{2} x^3\,dx = \mathbf{4}$

701. $\int\limits_{0}^{1} x^{10}\,dx = \mathbf{1/11}$

702. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx = \mathbf{14/3}$

703. $\int\limits_{1}^{27} \sqrt[3]{x}\,dx = \mathbf{60}$

704. $\int\limits_{-2}^{10} |x|\,dx = \mathbf{52}$

705. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x} = \mathbf{\ln 3}$

706. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x+1} = \mathbf{\ln 2}$

707. $\int\limits_{1}^{7} \frac{dx}{x+2} = \mathbf{\ln 3}$

708. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

709. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

710. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

711. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

712. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

713. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

714. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

715. $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

716. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{2\pi}$

717. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

718. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

719. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}}$

720. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}}$

721. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{12-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\pi}$

722. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}}$

Kolejne cztery zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

723. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}}\,.$$

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}} = \int_1^{25} \frac{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}{24}\,dx = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(x+24)^{3/2}-\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\left((x+24)^{3/2}-x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} = \frac{1}{36}\cdot(343-125-125+1) = \frac{94}{36} = \frac{47}{18}\,.$$

724. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x}\,dx < \frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x)=x^{2x}$ dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^{2x} = \frac{d}{dx}e^{2x\cdot\ln x} = e^{2x\cdot\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(2x\cdot\ln x) = x^{2x}\cdot(2\cdot\ln x+2) = 2\cdot x^{2x}\cdot(\ln x+1)\,.$$

Ponieważ $f'(x)>0$ dla $x>1/e$ oraz $f'(x)<0$ dla $0<x<1/e$, funkcja f jest malejąca w przedziale $(0,\,1/e)$ i rosnąca w przedziale $(1/e,\,+\infty)$. Zauważmy ponadto, że

$$f(1/4)=1/2$$

oraz

$$f(1/2)=1/2\,.$$

Wobec tego $f(x)<1/2$ dla $x\in(1/4,\,1/2)$, skąd

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x}\,dx < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\,.$$

Uwaga: Obliczenia komputerowe pokazują, że dana w zadaniu całka ma wartość w przybliżeniu 0,1215. Wydaje się to być zbyt bliskie oszacowaniu $1/8=0,125$, aby zadziałały inne metody szacowania (zapewne obarczone większym błędem).

725. Niech

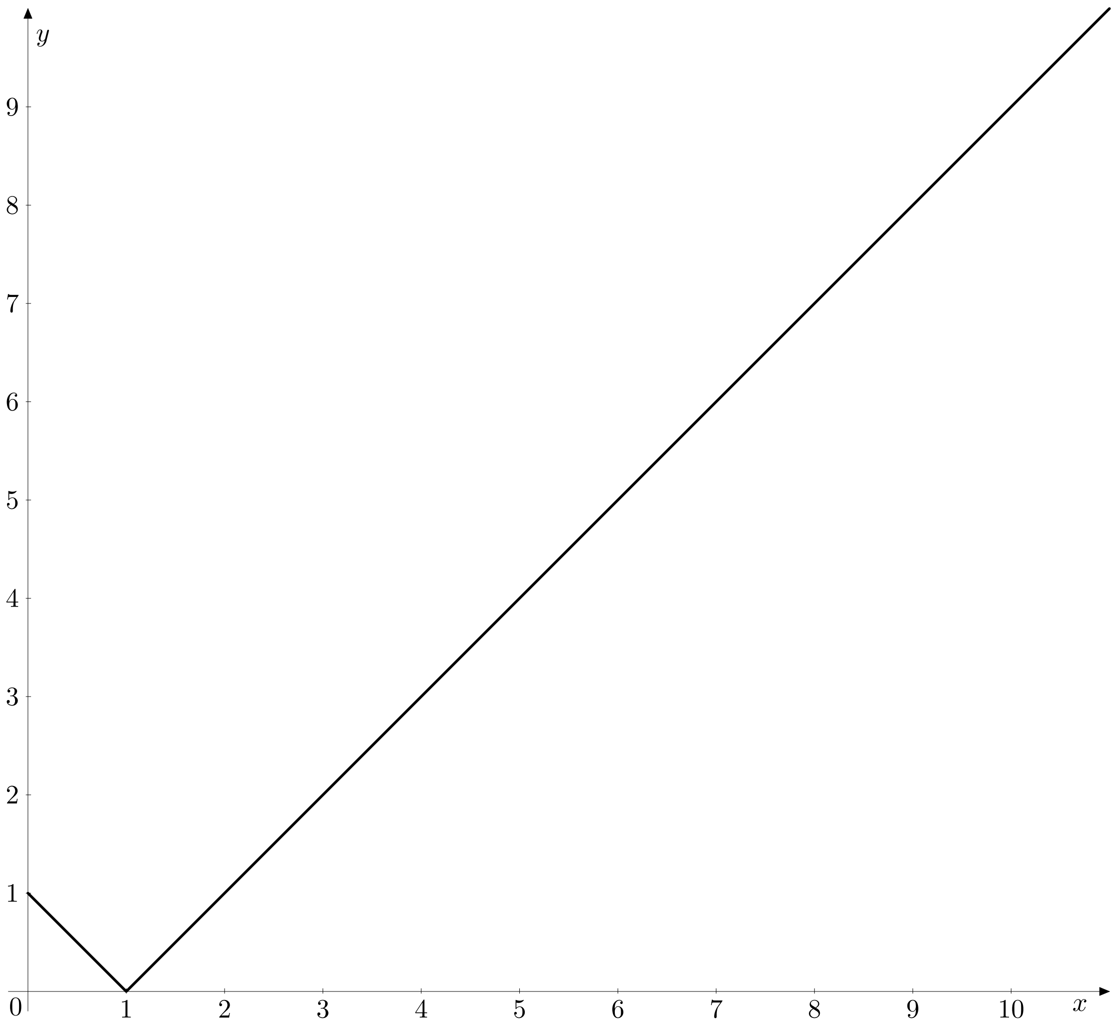
$$f_1(x)=\sqrt{x^2-2x+1} \qquad \text{oraz} \qquad f_{n+1}(x)=f_1\left(f_n(x)\right).$$

Obliczyć wartość całki oznaczonej

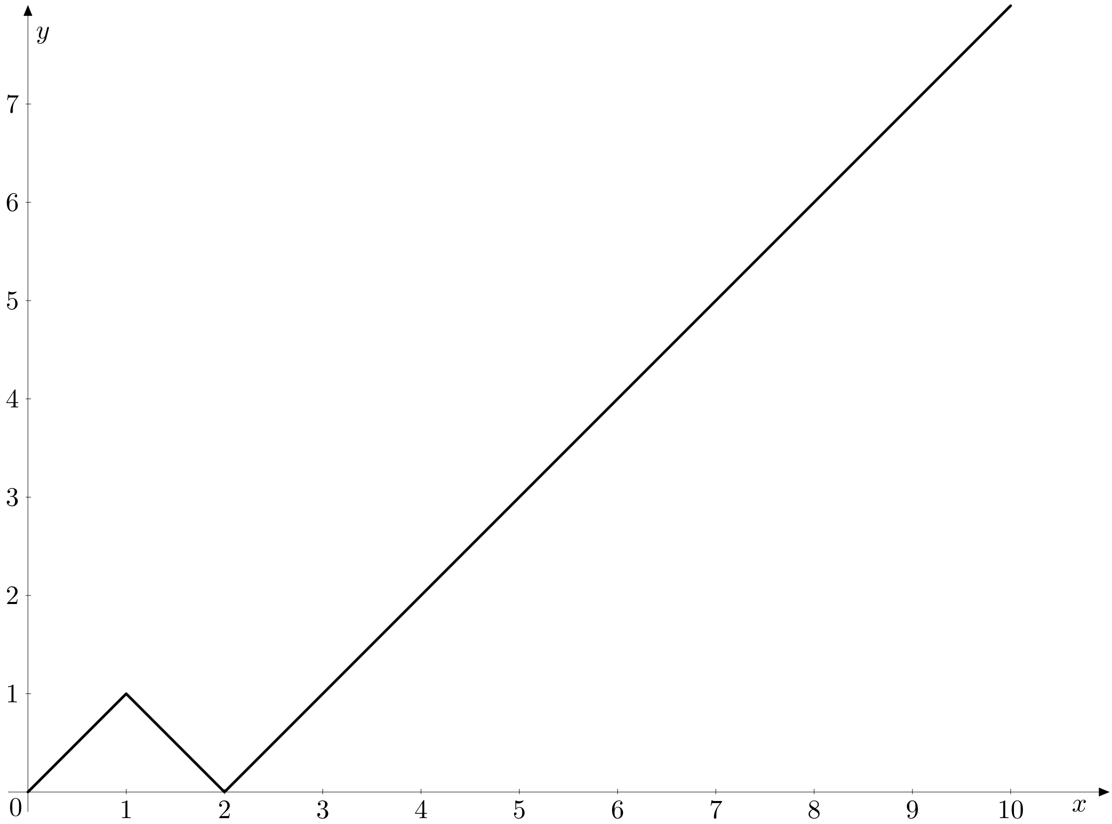
$$\int_0^{10} f_5(x)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

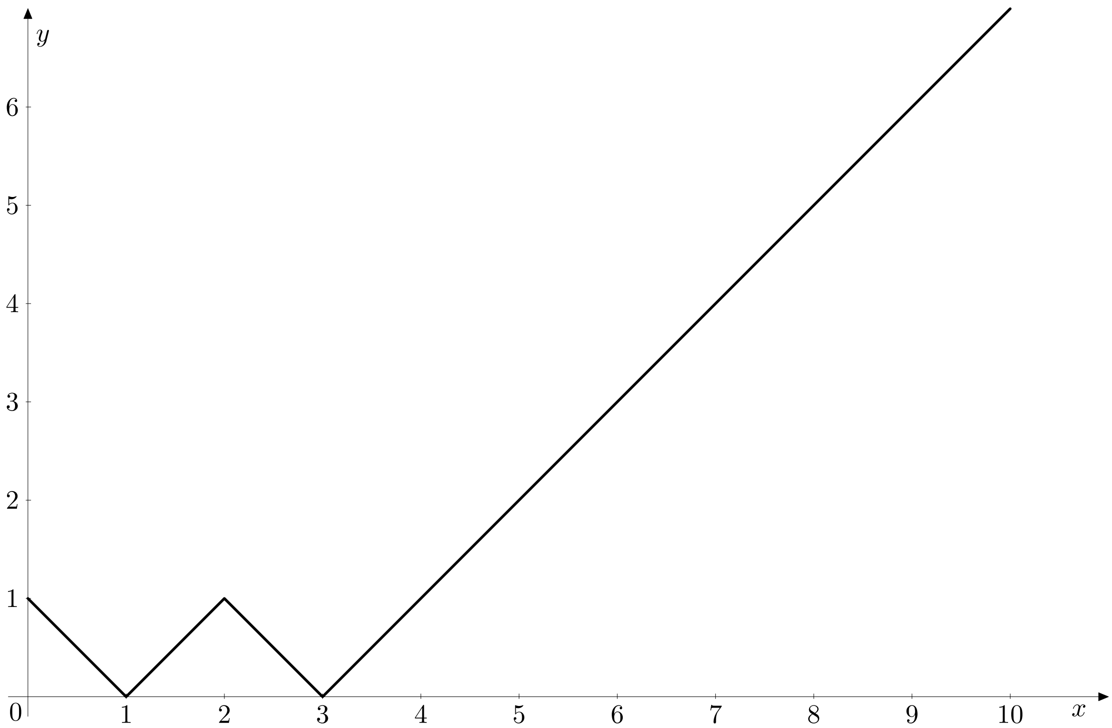
Zauważmy, że $f_1(x)=|x-1|$. W związku z tym wykres funkcji $f_1\circ g$ powstaje z wykresu funkcji g przez przesunięcie tegoż wykresu w dół o 1 oraz symetryczne odbicie części wykresu, która znalazła się pod osią OX. Wykresy funkcji od f_1 do f_5 znajdują się odpowiednio na rysunkach od 1 do 5.



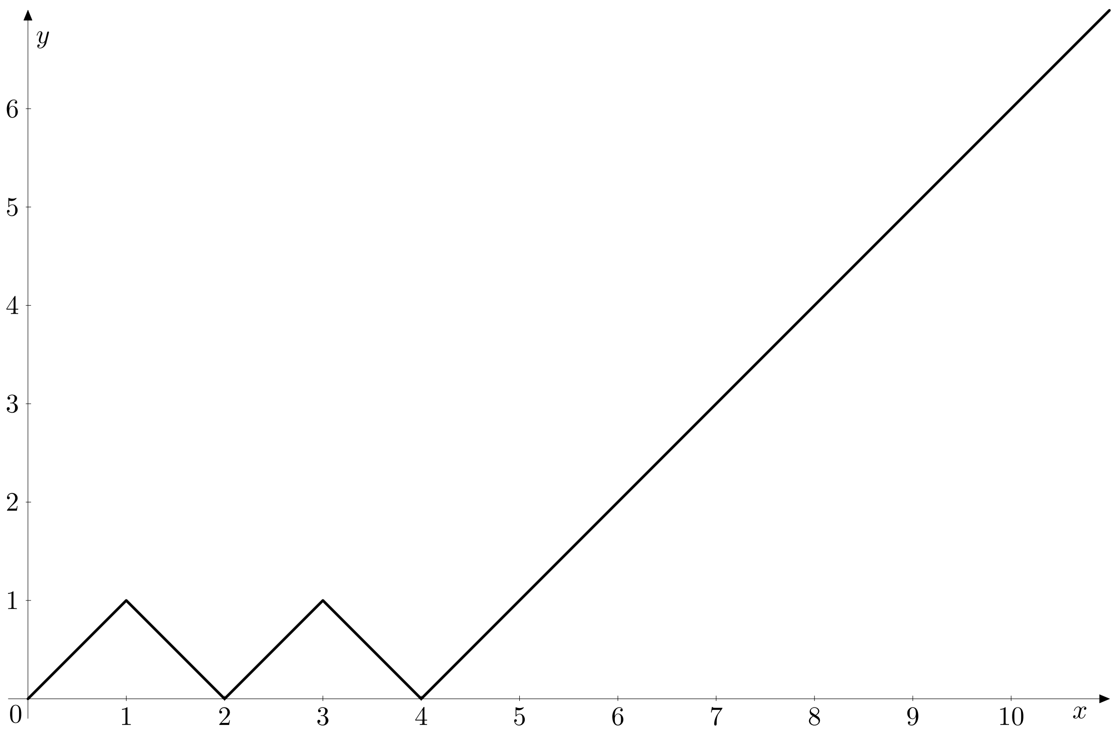
rys. 1



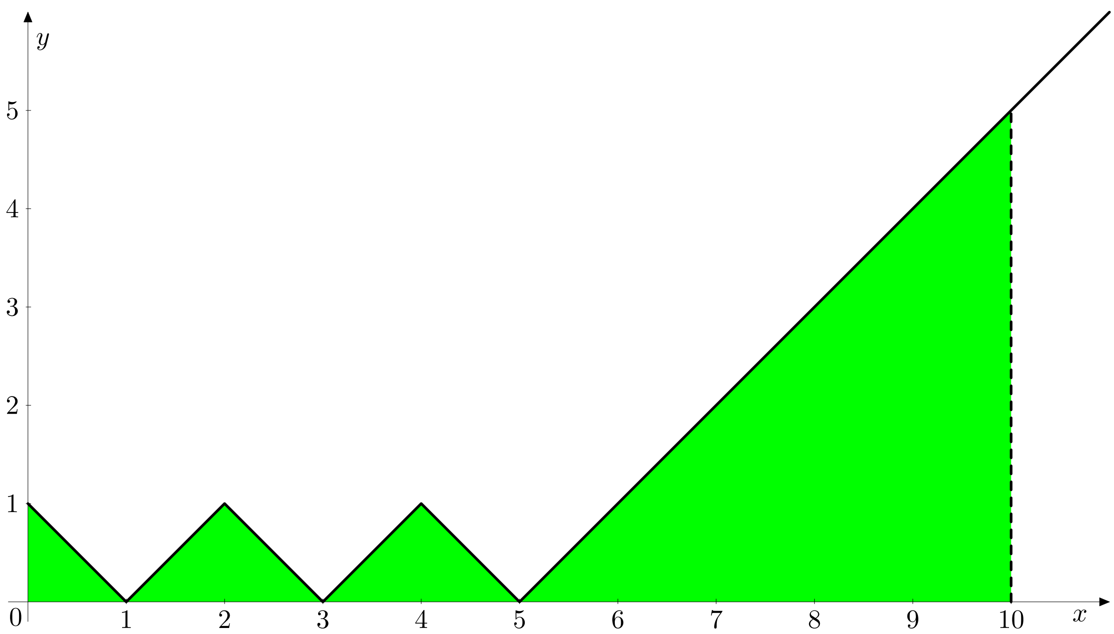
rys. 2



rys. 3



rys. 4



rys. 5

Szukana wartość całki oznaczonej jest równa polu zielonej figury z rysunku 5. Pole to wyliczamy sumując pola trójkątów, które się na nie składają:

$$\frac{1}{2}+1+1+\frac{25}{2}=15\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa 15.

726. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2 (5^x+3)\, dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\log_2 (5^x+3)\ .$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot\ln 5}{5^x+3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot(\ln 5)^2}{5^x+3}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^{2x}\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{3\cdot 5^x\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Ponieważ $f(1)=3$ oraz $f(3)=7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1,3)$ i $(3,7)$. Wobec tego $f(x)<2x+1$ dla $x\in(1,3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2 (5^x+3)\, dx<\int_1^3 2x+1\, dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.