

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 17.03.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Całka oznaczona.

W każdym z poniższych 25 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

$$698. \int_{2020}^{2023} 7 dx = \dots\dots\dots \quad 699. \int_0^3 x^2 dx = \dots\dots\dots \quad 700. \int_0^2 x^3 dx = \dots\dots\dots$$

$$701. \int_0^1 x^{10} dx = \dots\dots\dots \quad 702. \int_1^4 \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots \quad 703. \int_1^{27} \sqrt[3]{x} dx = \dots\dots\dots$$

$$704. \int_{-2}^{10} |x| dx = \dots\dots\dots \quad 705. \int_1^3 \frac{dx}{x} = \dots\dots\dots \quad 706. \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \dots\dots\dots$$

$$707. \int_1^7 \frac{dx}{x+2} = \dots\dots\dots \quad 708. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots \quad 709. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$$

$$710. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots \quad 711. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots \quad 712. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$$

$$713. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 714. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 715. \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$716. \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 717. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 718. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$719. \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 720. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$721. \int_0^3 \sqrt{12-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad 722. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

Kolejne cztery zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

723. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

724. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}.$$

725. Niech

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad \text{oraz} \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

726. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Udowodnić następujące nierówności:

$$\mathbf{727.} \quad \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{728.} \quad \frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{729.} \quad \int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{730.} \quad \int_0^1 x \cdot (1 - x^{99+x}) dx < \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{731.} \quad 5 < \int_1^3 x^x dx < 31$$

$$\mathbf{732.} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{733.} \quad 2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$$

$$\mathbf{734.} \quad \frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}.$$

Wsk.: Oszacować x^x przez x^a .

735. Niech

$$C(a,b) = \left[\int_a^b \log_x 2 \, dx \right],$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y . Obliczyć wartości wyrażeń:

- a) $C(80,122)$ b) $C(200,240)$ c) $C(400,440)$ d) $C(800,880)$

736. Dla podanej liczby a wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby zachodziła równość

$$\int_a^b \frac{x \, dx}{x^2+1} = \frac{\ln 5}{2}.$$

- a) $a = 0$ b) $a = 1$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

737. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{666} \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right| dx.$$

738. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{49}^{169} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+120}}.$$

739. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(3^x + 5) \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 8.

740. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{64}^{256} \sqrt{x} - \log_2 x \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 960.