695. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x+2}+\frac{E}{x+3}\,,$$

$$\begin{aligned}2x+3 \;=\;& A\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) \;+\; B\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x+3) \;+\\ +\;& D\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+3) \;+\; E\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\,.\end{aligned} \qquad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy[1] do równości (*) kolejno[2] $x=0$, -1, -2, -3. Otrzymujemy:

dla $x=0$ $\quad 3=6A$, skąd $A=1/2$,

dla $x=-1$ $\quad 1=-2B$, skąd $B=-1/2$,

dla $x=-2$ $\quad -1=2D$, skąd $D=-1/2$,

dla $x=-3$ $\quad -3=-6E$, skąd $E=1/2$.

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(\ln|x|-\ln|x+1|-\ln|x+2|+\ln|x+3|)+C\,.$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx=\int \frac{2x+3}{\big(x\cdot(x+3)\big)\cdot\big((x+1)\cdot(x+2)\big)}\,dx=$$
$$=\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)}\,dx\,,$$

a następnie podstawiamy $t=x^2+3x$ i formalnie $dt=(2x+3)\,dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)}\,dx=\int \frac{dt}{t\cdot(t+2)}\,.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t\cdot(t+2)}=\frac{1/2}{t}-\frac{1/2}{t+2}\,,$$

[1] Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

[2] To są wartości x, przy których czynniki liniowe się zerują.

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\int \frac{dt}{t\cdot(t+2)} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot(\ln|t| - \ln|t+2|) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left|x^2+3x\right| - \ln\left|x^2+3x+2\right|\right) + C\,.$$

696. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^8+x}\,.$$

Wskazówka: Przemnożyć licznik i mianownik przez x^6.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^8+x} = \int \frac{x^6\,dx}{x^{14}+x^7}$$

nasuwa pomysł podstawienia $t=x^7$ i formalnie $dt=7x^6\,dx$, co prowadzi do

$$\int \frac{x^6\,dx}{x^{14}+x^7} = \frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{t^2+t} = \frac{1}{7}\cdot\int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{7}\cdot(\ln|t| - \ln|t+1|) + C =$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\ln\left|x^7\right| - \ln\left|x^7+1\right|\right) + C = \ln|x| - \frac{\ln|x^7+1|}{7} + C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $x=t^{-1/7}$ i formalnie $dx=-\dfrac{dt}{7t^{8/7}}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^8+x} = -\frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{\left(t^{-8/7}+t^{-1/7}\right)\cdot t^{8/7}} = -\frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{7}\cdot\ln|t+1| + C =$$
$$= -\frac{1}{7}\cdot\ln\left|x^{-7}+1\right| + C = -\frac{1}{7}\cdot\ln\left|\frac{x^7+1}{x^7}\right| + C = \frac{1}{7}\cdot\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right| + C\,.$$

697. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy podaną całkę

$$\int \sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx = \int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx$$

i wykonujemy podstawienie $t=8x^5+1$ oraz formalnie $dt=40x^4\,dx$. Otrzymujemy

$$\int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx = \frac{1}{40}\cdot\int 40x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx = \frac{1}{40}\cdot\int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{40}\cdot\frac{3\cdot t^{4/3}}{4} + C =$$
$$= \frac{3\cdot t^{4/3}}{160} + C = \frac{3\cdot\left(8x^5+1\right)^{4/3}}{160} + C\,.$$