

W każdym z poniższych 20 zadań podaj wzór na funkcję różniczkowalną na całej prostej (lub w podanej dziedzinie) o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

$$641. \quad f'(x) = (4x - 5)^{54} \quad f(1) = 1 \quad f(x) = \frac{(4x - 5)^{55}}{220} + \frac{221}{220}$$

$$642. \quad f'(x) = \sqrt{3x+1} \quad f(1) = 1 \quad D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) \quad f(x) = \frac{2}{9} \cdot (3x+1)^{3/2} - \frac{7}{9}$$

$$643. \quad f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^4} \quad f(1) = 1 \quad f(x) = \frac{-1}{6 \cdot (x^2+1)^3} + \frac{49}{48}$$

$$644. \quad f'(x) = \frac{x^3}{x^4+1} \quad f(0) = 7 \quad f(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln(x^4+1) + 7$$

$$645. \quad f'(x) = \frac{1}{(3x-5)^2+1} \quad f(2) = 0 \quad f(x) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(3x-5) - \frac{\pi}{12}$$

$$646. \quad f'(x) = \sqrt[5]{x} \quad f(1) = 1 \quad f(x) = \frac{5x^{6/5}}{6} + \frac{1}{6}$$

$$647. \quad f'(x) = 200x \cdot (x^2+1)^{99} \quad f(0) = 0 \quad f(x) = (x^2+1)^{100} - 1$$

$$648. \quad f'(x) = 6x^3 \cdot \sqrt{x^4+9} \quad f(2) = 2 \quad f(x) = (x^4+9)^{3/2} - 123$$

$$649. \quad f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \quad f(-1) = -1 \quad f(x) = \ln(x^2+x+1) - 1$$

$$650. \quad f'(x) = \frac{4x^3+2x+1}{(x^4+x^2+x+1)^2} \quad f(1) = 1 \quad f(x) = -\frac{1}{x^4+x^2+x+1} + \frac{5}{4}$$

$$651. \quad f'(x) = \sqrt[7]{x+1} \quad f(0) = 2 \quad f(x) = \frac{7(x+1)^{8/7}}{8} + \frac{9}{8}$$

$$652. \quad f'(x) = x^2 \cdot (x^3+1)^{100} \quad f(0) = 1 \quad f(x) = \frac{(x^3+1)^{101}}{303} + \frac{302}{303}$$

$$653. \quad f'(x) = x^5 \cdot \sqrt[3]{x^6 + 7} \qquad f(1) = 0 \qquad f(x) = \frac{(x^6 + 7)^{4/3}}{8} - 2$$

$$654. \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \qquad f(0) = 0 \qquad f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln 2$$

$$655. \quad f'(x) = \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2 + 1} \qquad f(0) = 1 \qquad f(x) = \frac{\ln(x^4 + x^2 + 1)}{2} + 1$$

$$656. \quad f'(x) = \frac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 1)^2} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^4 + x^2 + 1)} + \frac{7}{6}$$

$$657. \quad f'(x) = \frac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 1)^3} \qquad f(1) = 1 \qquad f(x) = -\frac{1}{4 \cdot (x^4 + x^2 + 1)^2} + \frac{37}{36}$$

$$658. \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \qquad f(0) = 0 \qquad f(x) = \operatorname{arctg}(x + 1) - \frac{\pi}{4}$$

W kolejnych dwóch zadaniach funkcje mają być ciągłe na \mathbb{R} i różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$659. \quad f'(x) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad f(0) = 2 \qquad f(x) = -3 \cdot \cos \sqrt[3]{x} + 5$$

$$660. \quad f'(x) = \frac{\sin \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} \qquad f(0) = 2 \qquad f(x) = -5 \cdot \cos \sqrt[5]{x} + 7$$

Kolejne trzy zadania są przeznaczone do samodzielnej analizy (mają podane rozwiązania i nie będą omawiane na ćwiczeniach).

661. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[7]{x^5 + 1} dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $n = 4$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[7]{x^5 + 1},$$

czyli

$$t^7 = x^5 + 1$$

oraz formalnie

$$7t^6 dt = 5x^4 dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^4 \cdot \sqrt[7]{x^5+1} dx &= \frac{1}{5} \int \sqrt[7]{x^5+1} \cdot 5x^4 dx = \frac{1}{5} \int t \cdot 7t^6 dt = \frac{7}{5} \int t^7 dt = \frac{7}{5} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{7 \cdot t^8}{40} + C = \\ &= \frac{7}{40} \cdot (x^5+1)^{8/7} + C. \end{aligned}$$

662. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1} dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n .

Rozwiązanie:

Przyjmujemy $n = 6$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[11]{x^7+1},$$

czyli

$$t^{11} = x^7 + 1$$

oraz formalnie

$$11t^{10} dt = 7x^6 dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^6 \cdot \sqrt[11]{x^7+1} dx &= \frac{1}{7} \int \sqrt[11]{x^7+1} \cdot 7x^6 dx = \frac{1}{7} \int t \cdot 11t^{10} dt = \frac{11}{7} \int t^{11} dt = \frac{11}{7} \cdot \frac{t^{12}}{12} + C = \\ &= \frac{11 \cdot t^{12}}{84} + C = \frac{11}{84} \cdot (x^7+1)^{12/11} + C. \end{aligned}$$

663. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+40}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y = x+2$ oraz $t = y/6$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+4x+40} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+36} = \int \frac{dy}{y^2+36} = \int \frac{dy}{36(y/6)^2+36} = \int \frac{6 dt}{36t^2+36} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg}(y/6)}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg}((x+2)/6)}{6} + C. \end{aligned}$$