Kolokwium nr 1: czwartek 2.03.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 616–640.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 24.02.2023.

Całka nieoznaczona, całkowanie przez części.

616. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n-krotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x)=0$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

617. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1)=0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

618. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, że dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi równość $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

619. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, że dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi równość $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1)=f'(1)=0$.

620. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, że dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi równość $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1)=f(2)=0$.

621. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, że dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi równość $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1)=f(-2)=0$.

622. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, że dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi równość $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}$, a przy tym spełniony jest warunek $f(1)=f(2)=f(-2)=0$.

623. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2023-krotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że $f^{(2023)}(x)=e^{3x}$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

624. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2023-krotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że $f^{(2023)}(x)=\sin^2 x$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

625. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{los} x = \operatorname{nos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{nos} x = \operatorname{sos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sos} x = \operatorname{los} x\,.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2023-krotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunek $f^{(2023)}(x)=\operatorname{los}(2023x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

626. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$.

627. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ i spełniają dla każdego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ warunek $f''(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$. Wskazać wśród nich funkcję spełniajacą dodatkowy warunek $f(-1)=f(1)=f(4)=0$.

628. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-3)=-3$. Wyznaczyć $f(3)$.

629. Skonstruować funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(0)=0 \qquad \text{oraz} \qquad f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2} \;\; \text{dla} \;\; x\in\mathbb{R}\,.$$

630. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Obliczyć całki nieoznaczone:

631. $\int x^n\cdot\ln x\,dx$ **632.** $\int \sin\ln x\,dx$ **633.** $\int x^2\cdot\sin 7x\,dx$ **634.** $\int x^3\cdot e^{5x}\,dx$

635. $\int e^x\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx$ **636.** $\int x\cdot(x-1)^{5/4}\,dx$ **637.** $\int \frac{x}{(x+7)^e}\,dx$

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dla których $f'(x)$ zdefiniowane jest podanym wzorem:

638. $5\pi^4+|x|$ **639.** $\sqrt{x^4-2x^2+1}$ **640.** $|\sin x|$