ANALIZA 2, KOLOKWIUM nr 9, 16.06.2023, godz. 8:15–10:30

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **91.**

Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 28 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 \leqslant 63\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant 42\,. \qquad\qquad (\text{Wersja łatwiejsza}: \leqslant 46)$$

Zadanie **92.**

Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to zbieżny jest także szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{a_n^3}{n^5}}\,.$$

Zadanie **93.**

Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{a_n^3}{n^4}}$$

jest rozbieżny.

Zadanie **94.**

Obliczyć sumę szeregu o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\cdot(n+1+i)}\,.$$

Zadanie **95.**

Zapisać liczbę

$$\frac{\int\limits_0^\infty \frac{x^{20}}{x^{70}+1}\,dx}{\int\limits_0^\infty \frac{x^{20}}{x^{30}+1}\,dx}$$

w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie **96.**

Różnicą szeregów potęgowych $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ nazywamy szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n \,.$$

Rozważamy szereg potęgowy będący różnicą szeregów potęgowych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$. Obliczyć jego sumę dla $x=1$.

Zadanie **97.**

Funkcja f jest ciągła i wypukła na przedziale $[0,1]$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2n} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) .$$