

KOŁOKWIUM nr 8, 16.06.2023, godz. 8:15–10:30**Zadanie 15.** (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \cos 5x \cdot \cos 8x \cdot \cos 13x \, dx.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.*Rozwiązanie:*

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos 5x \cdot \cos 8x \cdot \cos 13x &= \frac{z^5 + z^{-5}}{2} \cdot \frac{z^8 + z^{-8}}{2} \cdot \frac{z^{13} + z^{-13}}{2} = \\ &= \frac{z^{26} + z^{16} + z^{10} + 2 + z^{-10} + z^{-16} + z^{-26}}{8} = \\ &= \frac{\cos 26x}{4} + \frac{\cos 16x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \cos 5x \cdot \cos 8x \cdot \cos 13x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 26x}{4} + \frac{\cos 16x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{1}{4} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\pi/2$.

Zadanie 16. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_7^9 \frac{dx}{x^2 - 12x + 39}.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int_7^9 \frac{dx}{x^2 - 12x + 39} = \int_7^9 \frac{dx}{(x-6)^2 + 3},$$

a następnie wykonujemy podstawienie $t = x - 6$ oraz $s = \frac{t}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} \int_7^9 \frac{dx}{(x-6)^2 + 3} &= \int_1^3 \frac{dt}{t^2 + 3} = \int_1^3 \frac{dt}{3 \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} ds}{3s^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{ds}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} s \Big|_{s=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{18}$.