

**Kolokwium 7 (AM2 22/23)**

Wersja testu **A** 1 czerwca 2023 r.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_{-1}^1 4 \cdot |x|^3 dx = \dots\dots\dots$

b)  $\int_{-1}^2 4 \cdot |x|^3 dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_{-1}^3 4 \cdot |x|^3 dx = \dots\dots\dots$

d)  $\int_{-2}^3 4 \cdot |x|^3 dx = \dots\dots\dots$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_0^1 \frac{x^{11} dx}{x^{24} + 1} = \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^1 \frac{x^5 dx}{x^{12} + 1} = \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^1 \frac{x^{23} dx}{x^{24} + 1} = \dots\dots\dots$

d)  $\int_0^1 \frac{x^{11} dx}{x^{12} + 1} = \dots\dots\dots$

3. Podaj wartość całki oznaczonej w postaci  $\ln \frac{m}{n}$ ,  $\text{NWD}(m, n) = 1$ .

a)  $\int_1^{25} \frac{dx}{x^2 + 2x} = \dots\dots\dots$

b)  $\int_1^6 \frac{dx}{x^2 + 2x} = \dots\dots\dots$

c)  $\int_2^{16} \frac{dx}{x^2 + 2x} = \dots\dots\dots$

d)  $\int_6^{25} \frac{dx}{x^2 + 2x} = \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \dots\dots\dots$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \dots\dots\dots$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \dots\dots\dots$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \dots\dots\dots$

5. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{n^n}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{n^{3n}}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^n}{n^{2n}}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^n}{n^{4n}}$ ,  $R = \dots\dots\dots$

6. Podaj sumę szeregu:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{81 + \frac{9919}{n}} - \sqrt{81 + \frac{9919}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{64 + \frac{9936}{n}} - \sqrt{64 + \frac{9936}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{36 + \frac{9964}{n}} - \sqrt{36 + \frac{9964}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{49 + \frac{9951}{n}} - \sqrt{49 + \frac{9951}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$$

7. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru  $p$ , dla których podany szereg jest zbieżny.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+1}+1}}, \dots\dots\dots \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+2}+2}}, \dots\dots\dots$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+4}+4}}, \dots\dots\dots \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+3}+3}}, \dots\dots\dots$$

8. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru  $p$ , dla których podany szereg jest zbieżny.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p-7)^n}{n^2}, \dots\dots\dots \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3p-7)^n}{n}, \dots\dots\dots$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p-7)^n}{\sqrt{n}}, \dots\dots\dots \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} (6p-7)^n, \dots\dots\dots$$

9. Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj taką liczbę wymierną  $w$ , że  $\arctg n + \arctg w = \arctg(n+1)$ .

$$a) n=5, w = \dots\dots\dots \quad b) n=3, w = \dots\dots\dots$$

$$c) n=2, w = \dots\dots\dots \quad d) n=4, w = \dots\dots\dots$$

10. Niech  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  oraz  $C(n) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx$ . Wówczas:

a)  $C(5) = \dots\dots\dots$                       b)  $C(4) = \dots\dots\dots$

c)  $C(2) = \dots\dots\dots$                       d)  $C(3) = \dots\dots\dots$

**11. (ZADANIE DODATKOWE)**

Niech  $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{n^k}$  oraz  $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) \, dx$ . Wówczas:

a)  $C(10, 13) = \dots\dots\dots$                       b)  $C(3, 5) = \dots\dots\dots$

c)  $C(5, 7) = \dots\dots\dots$                       d)  $C(7, 11) = \dots\dots\dots$

**12. (ZADANIE DODATKOWE)** Niech  $S(n) = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right]$ , gdzie  $[x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ . Wówczas:

a)  $S(400) = \dots\dots\dots$                       b)  $S(900) = \dots\dots\dots$

c)  $S(2500) = \dots\dots\dots$                       d)  $S(100) = \dots\dots\dots$

**13. (ZADANIE DODATKOWE)** Niech  $S(n) = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \right]$ , gdzie  $[x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ . Wówczas:

a)  $S(1000) = \dots\dots\dots$                       b)  $S(64\,000) = \dots\dots\dots$

c)  $S(64) = \dots\dots\dots$                       d)  $S(8000) = \dots\dots\dots$