Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **A** 1 czerwca 2023 r.

Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **A** 1 czerwca 2023 r.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{1} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{2}$ b) $\int\limits_{-1}^{2} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{17}$

c) $\int\limits_{-1}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{82}$ d) $\int\limits_{-2}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{97}$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{24}+1} = \boldsymbol{\pi/48}$ b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{5}\,dx}{x^{12}+1} = \boldsymbol{\pi/24}$

c) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{23}\,dx}{x^{24}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{24}}$ d) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{12}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{12}}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej w postaci $\mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$, $\mathrm{NWD}(m,n)=1$.

a) $\int\limits_{1}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ b) $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

c) $\int\limits_{2}^{16} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ d) $\int\limits_{6}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=5n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,12}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,30}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,20}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=4n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,15}$

5. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $R=\mathbf{e^3/27}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $R=\mathbf{e^2/4}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $R=\mathbf{e^4/256}$

6. Podaj sumę szeregu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{81+\frac{9919}{n}}-\sqrt{81+\frac{9919}{n+1}}\right)=\mathbf{91}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{64+\frac{9936}{n}}-\sqrt{64+\frac{9936}{n+1}}\right)=\mathbf{92}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{36+\frac{9964}{n}}-\sqrt{36+\frac{9964}{n+1}}\right)=\mathbf{94}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{49+\frac{9951}{n}}-\sqrt{49+\frac{9951}{n+1}}\right)=\mathbf{93}$

7. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+1}+1}}$, $\boldsymbol{\left(-1,\infty\right)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+2}+2}}$, $\boldsymbol{\left(-2,\infty\right)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+4}+4}}$, $\boldsymbol{\left(-4,\infty\right)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+3}+3}}$, $\boldsymbol{\left(-3,\infty\right)}$

8. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4p-7)^n}{n^2}$, $[\mathbf{3/2,\ 2}]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-7)^n}{n}$, $[\mathbf{2,\ 8/3})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-7)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{3,\ 4})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(6p-7)^n$, $(\mathbf{1,\ 4/3})$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(n+1)$.

a) $n=5,\ \ w=\mathbf{1/31}$

b) $n=3,\ \ w=\mathbf{1/13}$

c) $n=2,\ \ w=\mathbf{1/7}$

d) $n=4,\ \ w=\mathbf{1/21}$

10. Niech $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx$. Wówczas:

a) $C(5)=\boldsymbol{\pi/25}$

b) $C(4)=\boldsymbol{\pi/16}$

c) $C(2)=\boldsymbol{\pi/4}$

d) $C(3)=\boldsymbol{\pi/9}$

11. (ZADANIE DODATKOWE)

Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(10,13)=\boldsymbol{\pi/129}$

b) $C(3,5)=\boldsymbol{\pi/14}$

c) $C(5,7)=\boldsymbol{\pi/34}$

d) $C(7,11)=\boldsymbol{\pi/76}$

12. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(400)=\mathbf{38}$

b) $S(900)=\mathbf{58}$

c) $S(2500)=\mathbf{98}$

d) $S(100)=\mathbf{18}$

13. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(1000)=\mathbf{27}$

b) $S(64\,000)=\mathbf{117}$

c) $S(64)=\mathbf{9}$

d) $S(8000)=\mathbf{57}$

Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **B** 1 czerwca 2023 r.

Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **B** 1 czerwca 2023 r.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{-1}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{82}$

b) $\int_{-1}^{2} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{17}$

c) $\int_{-1}^{1} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{2}$

d) $\int_{-2}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{97}$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{12}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{12}}$

b) $\int_{0}^{1} \frac{x^{23}\,dx}{x^{24}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{24}}$

c) $\int_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{24}+1} = \boldsymbol{\pi/48}$

d) $\int_{0}^{1} \frac{x^{5}\,dx}{x^{12}+1} = \boldsymbol{\pi/24}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej w postaci $\mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$, NWD$(m,n)=1$.

a) $\int_{2}^{16} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$

b) $\int_{1}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

c) $\int_{1}^{6} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

d) $\int_{6}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=5n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,12}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=4n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,15}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,20}$

d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,30}$

5. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}, \quad R = \mathbf{e^4/256}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}, \quad R = \mathbf{e^3/27}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}, \quad R = \mathbf{e^2/4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^n}{n^{n}}, \quad R = \mathbf{e}$

6. Podaj sumę szeregu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{64+\frac{9936}{n}}-\sqrt{64+\frac{9936}{n+1}}\right)=\mathbf{92}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{49+\frac{9951}{n}}-\sqrt{49+\frac{9951}{n+1}}\right)=\mathbf{93}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{81+\frac{9919}{n}}-\sqrt{81+\frac{9919}{n+1}}\right)=\mathbf{91}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{36+\frac{9964}{n}}-\sqrt{36+\frac{9964}{n+1}}\right)=\mathbf{94}$

7. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+1}+1}}$, $\boldsymbol{(-1,\infty)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+2}+2}}$, $\boldsymbol{(-2,\infty)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+3}+3}}$, $\boldsymbol{(-3,\infty)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+4}+4}}$, $\boldsymbol{(-4,\infty)}$

8. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(6p-7)^n$, $\mathbf{(1,\,4/3)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-7)^n}{n}$, $\mathbf{[2,\,8/3)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-7)^n}{\sqrt{n}}$, $\mathbf{[3,\,4)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4p-7)^n}{n^2}$, $\mathbf{[3/2,\,2]}$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(n+1)$.

a) $n=3$, $w=\mathbf{1/13}$

b) $n=4$, $w=\mathbf{1/21}$

c) $n=2$, $w=\mathbf{1/7}$

d) $n=5$, $w=\mathbf{1/31}$

10. Niech $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx$. Wówczas:

a) $C(3)=\boldsymbol{\pi/9}$ b) $C(5)=\boldsymbol{\pi/25}$

c) $C(4)=\boldsymbol{\pi/16}$ d) $C(2)=\boldsymbol{\pi/4}$

11. (ZADANIE DODATKOWE)
Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(7,11)=\boldsymbol{\pi/76}$ b) $C(10,13)=\boldsymbol{\pi/129}$

c) $C(5,7)=\boldsymbol{\pi/34}$ d) $C(3,5)=\boldsymbol{\pi/14}$

12. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(400)=\mathbf{38}$ b) $S(900)=\mathbf{58}$

c) $S(100)=\mathbf{18}$ d) $S(2500)=\mathbf{98}$

13. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(64\,000)=\mathbf{117}$ b) $S(1000)=\mathbf{27}$

c) $S(8000)=\mathbf{57}$ d) $S(64)=\mathbf{9}$

Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **C** 1 czerwca 2023 r.

Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **C** 1 czerwca 2023 r.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{-1}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{82}$

b) $\int_{-1}^{1} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{2}$

c) $\int_{-2}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{97}$

d) $\int_{-1}^{2} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{17}$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{24}+1} = \boldsymbol{\pi/48}$

b) $\int_{0}^{1} \frac{x^{23}\,dx}{x^{24}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{24}}$

c) $\int_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{12}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{12}}$

d) $\int_{0}^{1} \frac{x^{5}\,dx}{x^{12}+1} = \boldsymbol{\pi/24}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej w postaci $\mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$, NWD$(m,n)=1$.

a) $\int_{1}^{6} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

b) $\int_{1}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

c) $\int_{2}^{16} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$

d) $\int_{6}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=5n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,12}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,20}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=4n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,15}$

d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,30}$

5. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $\quad R = \mathbf{e^2/4}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^n}{n^{n}}$, $\quad R = \mathbf{e}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $\quad R = \mathbf{e^4/256}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $\quad R = \mathbf{e^3/27}$

6. Podaj sumę szeregu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{64+\frac{9936}{n}}-\sqrt{64+\frac{9936}{n+1}}\right)=\mathbf{92}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{49+\frac{9951}{n}}-\sqrt{49+\frac{9951}{n+1}}\right)=\mathbf{93}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{81+\frac{9919}{n}}-\sqrt{81+\frac{9919}{n+1}}\right)=\mathbf{91}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{36+\frac{9964}{n}}-\sqrt{36+\frac{9964}{n+1}}\right)=\mathbf{94}$

7. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+2}+2}}$, $\big(\mathbf{-2,\infty}\big)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+3}+3}}$, $\big(\mathbf{-3,\infty}\big)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+1}+1}}$, $\big(\mathbf{-1,\infty}\big)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+4}+4}}$, $\big(\mathbf{-4,\infty}\big)$

8. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4p-7)^n}{n^2}$, $[\mathbf{3/2,\ 2}]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-7)^n}{n}$, $[\mathbf{2,\ 8/3})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-7)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{3,\ 4})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(6p-7)^n$, $(\mathbf{1,\ 4/3})$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(n+1)$.

a) $n=3$, $w=\mathbf{1/13}$

b) $n=5$, $w=\mathbf{1/31}$

c) $n=2$, $w=\mathbf{1/7}$

d) $n=4$, $w=\mathbf{1/21}$

10. Niech $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx$. Wówczas:

a) $C(2)=\boldsymbol{\pi/4}$ b) $C(5)=\boldsymbol{\pi/25}$

c) $C(4)=\boldsymbol{\pi/16}$ d) $C(3)=\boldsymbol{\pi/9}$

11. (ZADANIE DODATKOWE)

Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(10,13)=\boldsymbol{\pi/129}$ b) $C(5,7)=\boldsymbol{\pi/34}$

c) $C(3,5)=\boldsymbol{\pi/14}$ d) $C(7,11)=\boldsymbol{\pi/76}$

12. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(900)=\mathbf{58}$ b) $S(2500)=\mathbf{98}$

c) $S(100)=\mathbf{18}$ d) $S(400)=\mathbf{38}$

13. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(64)=\mathbf{9}$ b) $S(8000)=\mathbf{57}$

c) $S(1000)=\mathbf{27}$ d) $S(64\,000)=\mathbf{117}$

Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **D** 1 czerwca 2023 r.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{1} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{2}$ b) $\int\limits_{-2}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{97}$

c) $\int\limits_{-1}^{2} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{17}$ d) $\int\limits_{-1}^{3} 4\cdot|x|^3\,dx = \mathbf{82}$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{24}+1} = \boldsymbol{\pi/48}$ b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{11}\,dx}{x^{12}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{12}}$

c) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{5}\,dx}{x^{12}+1} = \boldsymbol{\pi/24}$ d) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{23}\,dx}{x^{24}+1} = \frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{24}}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej w postaci $\mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$, NWD$(m,n)=1$.

a) $\int\limits_{2}^{16} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ b) $\int\limits_{1}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

c) $\int\limits_{6}^{25} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}$ d) $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{x^2+2x} = \mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=5n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,12}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=4n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,15}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,30}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3n+1}^{60n} \frac{1}{k} = \mathbf{ln\,20}$

5. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot x^n}{n^{2n}}$, $R = \mathbf{e^2/4}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^n}{n^{n}}$, $R = \mathbf{e}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\cdot x^n}{n^{3n}}$, $R = \mathbf{e^3/27}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!\cdot x^n}{n^{4n}}$, $R = \mathbf{e^4/256}$

6. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{64+\frac{9936}{n}}-\sqrt{64+\frac{9936}{n+1}}\right)=\mathbf{92}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{49+\frac{9951}{n}}-\sqrt{49+\frac{9951}{n+1}}\right)=\mathbf{93}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{81+\frac{9919}{n}}-\sqrt{81+\frac{9919}{n+1}}\right)=\mathbf{91}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{36+\frac{9964}{n}}-\sqrt{36+\frac{9964}{n+1}}\right)=\mathbf{94}$

7. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^{p+4}+4}}$, $\boldsymbol{\left(-4,\,\infty\right)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{p+2}+2}}$, $\boldsymbol{\left(-2,\,\infty\right)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^{p+3}+3}}$, $\boldsymbol{\left(-3,\,\infty\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{p+1}+1}}$, $\boldsymbol{\left(-1,\,\infty\right)}$

8. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4p-7)^n}{n^2}$, $\boldsymbol{[3/2,\,2]}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-7)^n}{n}$, $\boldsymbol{[2,\,8/3)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-7)^n}{\sqrt{n}}$, $\boldsymbol{[3,\,4)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(6p-7)^n$, $\boldsymbol{(1,\,4/3)}$

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg} n+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(n+1)$.

a) $n=5,\ \ w=\mathbf{1/31}$

b) $n=2,\ \ w=\mathbf{1/7}$

c) $n=3,\ \ w=\mathbf{1/13}$

d) $n=4,\ \ w=\mathbf{1/21}$

Kolokwium 7 (AM2 22/23) Wersja testu **D** 1 czerwca 2023 r.

10. Niech $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx$. Wówczas:

a) $C(3)=\boldsymbol{\pi/9}$ b) $C(2)=\boldsymbol{\pi/4}$

c) $C(5)=\boldsymbol{\pi/25}$ d) $C(4)=\boldsymbol{\pi/16}$

11. (ZADANIE DODATKOWE)

Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(10,13)=\boldsymbol{\pi/129}$ b) $C(7,11)=\boldsymbol{\pi/76}$

c) $C(3,5)=\boldsymbol{\pi/14}$ d) $C(5,7)=\boldsymbol{\pi/34}$

12. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(2500)=\mathbf{98}$ b) $S(900)=\mathbf{58}$

c) $S(400)=\mathbf{38}$ d) $S(100)=\mathbf{18}$

13. (ZADANIE DODATKOWE) Niech $S(n)=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas:

a) $S(8000)=\mathbf{57}$ b) $S(1000)=\mathbf{27}$

c) $S(64\,000)=\mathbf{117}$ d) $S(64)=\mathbf{9}$