KOLOKWIUM nr 6, 18.05.2023, godz. 8:15–9:45

Zadanie **10. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)\cdot(2x+1)^2}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{(x+2)\cdot(2x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{2x+1}\,,$$

$$1 = A\cdot(2x+1)^2 + B\cdot(x+2) + C\cdot(x+2)\cdot(2x+1)\,,$$

$$1 = 4Ax^2 + 4Ax + A + Bx + 2B + 2Cx^2 + 5Cx + 2C\,,$$

$$\begin{cases} 0 = 4A+2C \\ 0 = 4A+B+5C \\ 1 = A+2B+2C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} C = -2A \\ 0 = -6A+B \\ 1 = -3A+2B \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -2A \\ B = 6A \\ 1 = 9A \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -2/9 \\ B = 2/3 \\ A = 1/9 \end{cases}$$

Wobec tego

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)\cdot(2x+1)^2} = \frac{1}{9}\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x+2} + \frac{6}{(2x+1)^2} - \frac{2}{2x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(\ln(x+2) - \frac{3}{2x+1} - \ln(2x+1)\right)\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(\left(\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+2) - \frac{3}{2x+1} - \ln(2x+1)\right)\right) - \ln 3 + \frac{3}{3} + \ln 3\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+2}{2x+1}\right)+1\right) = \frac{1}{9}\cdot\left(\left(\ln\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x+1}\right)+1\right) = \frac{1}{9}\cdot(\ln(1/2)+1) = \frac{1}{9} - \frac{\ln 2}{9}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{1}{9} - \frac{\ln 2}{9}$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym.

Zadanie **11. (10 punktów)**
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (2n)! \cdot (8n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}} \tag{1}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{2^{n+1} \cdot (2n+2)! \cdot (8n+8)! \cdot x^{pn+p}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{pn+p}} \cdot \frac{n! \cdot n^{pn}}{2^n \cdot (2n)! \cdot (8n)! \cdot x^{pn}}\right| =$$

$$= \frac{2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (8n+1) \cdot (8n+2) \cdot (8n+3) \cdot \ldots \cdot (8n+8) \cdot |x|^p}{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn} \cdot (n+1)^p} =$$

$$= \frac{32 \cdot (2n+1) \cdot (8n+1) \cdot (8n+2) \cdot (8n+3) \cdot \ldots \cdot (8n+7)}{(n+1)^{p-1}} \cdot \frac{|x|^p}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \to 2^{27} \cdot \frac{|x|^p}{e^p}$$

przy $n \to \infty$, o ile $p-1=8$, bo tylko w tym przypadku pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $2^{27} \cdot \frac{|x|^9}{e^9}$ dla $p=9$.

Jeżeli $2^{27} \cdot \frac{|x|^9}{e^9} < 1$, czyli $|x| < \frac{e}{8}$, to szereg (1) jest zbieżny.
Jeżeli zaś $2^{27} \cdot \frac{|x|^9}{e^9} > 1$, czyli $|x| > \frac{e}{8}$, to szereg (1) jest rozbieżny.
Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{e}{8}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=9$ promień zbieżności $\frac{e}{8}$.

Zadanie **12. (10 punktów)**
Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z=\cos x+i\sin x$. Wówczas

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx, \qquad \sin x=\frac{z-z^{-1}}{2i}, \qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$

Zatem

$$\sin^4 x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^4=\frac{z^4-4z^2+6-4z^{-2}+z^{-4}}{16}=$$

$$=\frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\,.$$

Wobec tego

$$\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\, dx=\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\, dx=$$

$$=\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos 2x}{2}\, dx+\int_0^{\pi/4} \frac{3}{8}\, dx=\left.\frac{\sin 4x}{32}-\frac{\sin 2x}{4}\right|_{x=0}^{\pi/4}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{8}=$$

$$=\frac{\sin\pi}{32}-\frac{\sin(\pi/2)}{4}+\frac{3\pi}{32}=\frac{0}{32}-\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\dfrac{3\pi}{32}-\dfrac{1}{4}$.

Zadanie **13. (10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\,.$$

Rozwiązanie:
Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-1)(n+1)$ otrzymujemy

$$1=A(n+1)+B(n-1)\,.$$

Dla $n=1$ otrzymujemy $A=1/2$, natomiast przyjęcie $n=-1$ daje $B=-1/2$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{n-1}-\frac{(-1)^n}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{(-1)^N}{N-3}-\frac{(-1)^N}{N-1}\right)-\left(\frac{(-1)^N}{N-2}-\frac{(-1)^N}{N}\right)+\left(\frac{(-1)^N}{N-1}-\frac{(-1)^N}{N+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^N}{N}-\frac{(-1)^N}{N+1}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/4$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/4$.

Zadanie **14. (ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć

$$\left[\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999\,998}}+\frac{1}{\sqrt{999\,999}}+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}\right],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sum_{n=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}} < \int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{n=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Lewa nierówność wynika z porównania pól zielonego i żółtego przedstawionych odpowiednio na rysunkach 1 i 2.

Prawa nierówność wynika z porównania pól żółtego i czerwonego przedstawionych odpowiednio na rysunkach 2 i 3.

Z powyższego oraz z równości

$$\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\,\Big|_{x=1}^{10^6}=1998$$

wynikają nierówności

$$\sum_{n=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}} < 1998 < \sum_{n=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\sum_{n=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+1998=1999$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}}>\sum_{n=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{n}}>1998\,.$$

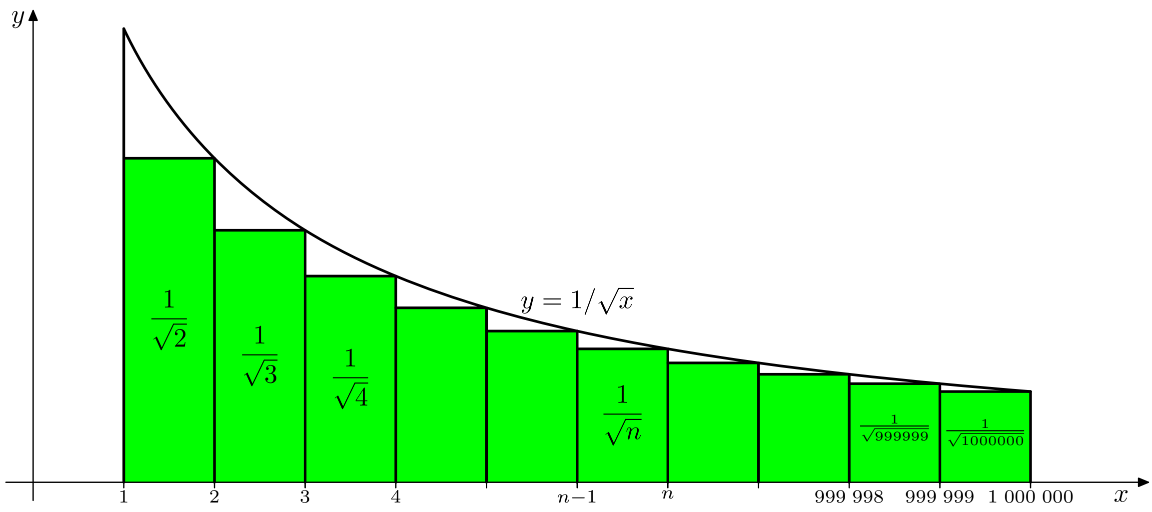
Ponieważ

$$1998 < \sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}} < 1999\,,$$

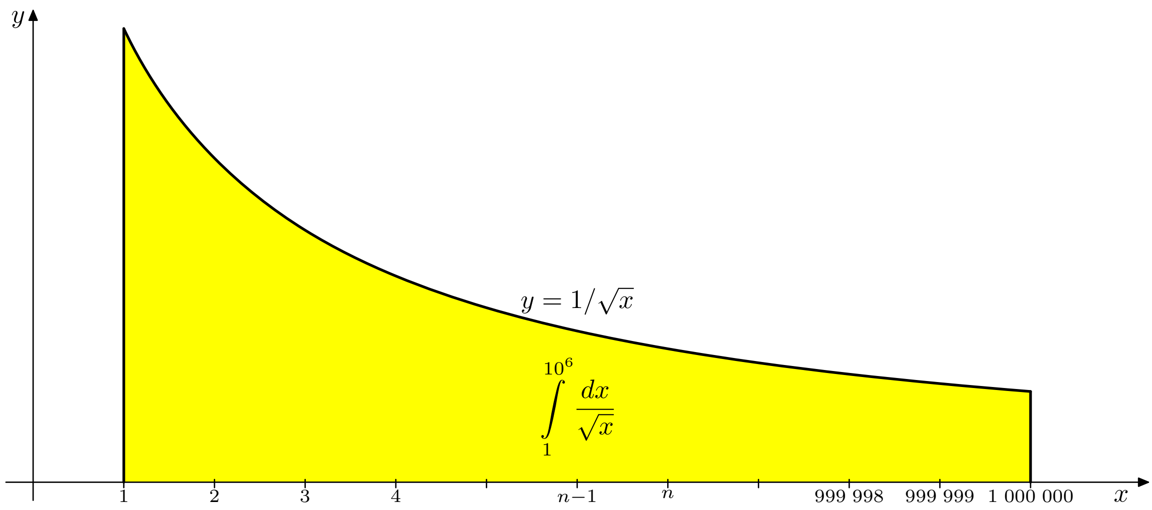
otrzymujemy

$$\left[\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=1998\,.$$

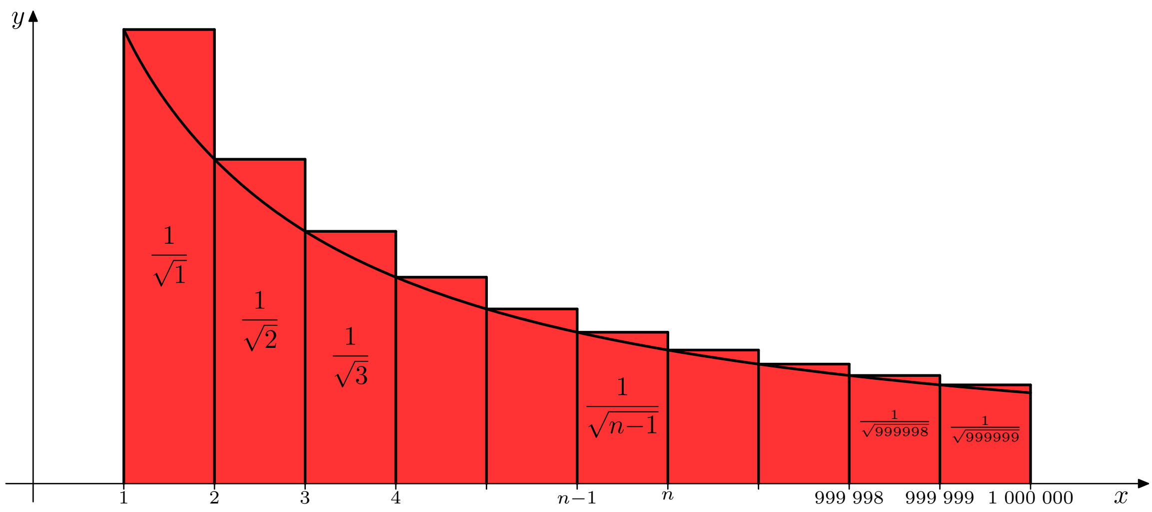
Odpowiedź: Dana w treści zadania liczba jest równa 1998.



rys. 1



rys. 2



rys. 3