KOLOKWIUM nr 2, 16.03.2023, godz. 8:15–9:45

Zadanie **5. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+14x+149}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+7$ oraz $t=y/10$:

$$\int \frac{dx}{x^2+14x+149}=\int \frac{dx}{(x+7)^2+100}=\int \frac{dy}{y^2+100}=\int \frac{dy}{100(y/10)^2+100}=\int \frac{10\,dt}{100t^2+100}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} t}{10}+C=\frac{\operatorname{arctg}(y/10)}{10}+C=\frac{1}{10}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+7}{10}+C\,.$$

Zadanie **6. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{2+\sqrt{e^x+4}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{2+\sqrt{e^x+4}}\,,$$

$$t^2-2=\sqrt{e^x+4}\,,$$

$$\left(t^2-2\right)^2-4=e^x\,,$$

$$t^4-4t^2=e^x\,,$$

$$x=\ln\left(t^4-4t^2\right)\,,$$

$$dx=\frac{4t^3-8t}{t^4-4t^2}\,dt\,.$$

Otrzymujemy

$$\int \sqrt{2+\sqrt{e^x+4}}\,dx=\int t\cdot\frac{4t^3-8t}{t^4-4t^2}\,dt=\int \frac{4t^2-8}{t^2-4}\,dt=\int 4+\frac{8}{t^2-4}\,dt\,.$$

Rozkładając $\frac{1}{t^2-4}$ na ułamki proste otrzymujemy

$$\frac{1}{t^2-4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\,,$$

co pozwala dokończyć całkowanie

$$\int 4+\frac{8}{t^2-4}\,dt=\int 4+2\cdot\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\,dt=4t+2\cdot\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)+C=$$

$$=4\cdot\sqrt{2+\sqrt{e^x+4}}+2\cdot\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{e^x+4}}-2\right)-2\cdot\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{e^x+4}}+2\right)+C\,.$$

Zadanie **7. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+5)\cdot(x+6)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+5)\cdot(x+6)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x+5}+\frac{E}{x+6}\,,$$

$$\begin{array}{rcllll} x+3 & = & A\cdot(x+1)\cdot(x+5)\cdot(x+6) & + & B\cdot x\cdot(x+5)\cdot(x+6) & + \\ & + & D\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+6) & + & E\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+5)\,. & \end{array} \qquad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy[1] do równości (*) kolejno[2] $x=0,\,-1,\,-5,\,-6$. Otrzymujemy:

dla $x=0$ $\qquad 3=30A$, skąd $A=1/10$,

dla $x=-1$ $\qquad 2=-20B$, skąd $B=-1/10$,

dla $x=-5$ $\qquad -2=20D$, skąd $D=-1/10$,

dla $x=-6$ $\qquad -3=-30E$, skąd $E=1/10$.

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+5)\cdot(x+6)}\,dx=\frac{1}{10}\cdot\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\,dx=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot(\ln|x|-\ln|x+1|-\ln|x+5|+\ln|x+6|)+C\,.$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+5)\cdot(x+6)}\,dx=\int \frac{x+3}{\big(x\cdot(x+6)\big)\cdot\big((x+1)\cdot(x+5)\big)}\,dx=$$

$$=\int \frac{x+3}{(x^2+6x)\cdot(x^2+6x+5)}\,dx\,,$$

a następnie podstawiamy $t=x^2+6x$ i formalnie $dt=(2x+6)\,dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+3}{(x^2+6x)\cdot(x^2+6x+5)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+6}{(x^2+6x)\cdot(x^2+6x+5)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t\cdot(t+5)}\,.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t\cdot(t+5)}=\frac{1/5}{t}-\frac{1/5}{t+5}\,,$$

[1] Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

[2] To są wartości x, przy których czynniki liniowe się zerują.

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t\cdot(t+5)}=\frac{1}{10}\cdot\int\frac{1}{t}-\frac{1}{t+5}\,dt=\frac{1}{10}\cdot(\ln|t|-\ln|t+5|)+C=$$
$$=\frac{1}{10}\cdot\left(\ln\left|x^2+6x\right|-\ln\left|x^2+6x+5\right|\right)+C\,.$$

Zadanie **8. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{x^{13}+x^{10}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie oryginalne zawierające przeoczenie:

Przekształcamy podaną całkę

$$\int \sqrt{x^{13}+x^{10}}\,dx = \int x^5\cdot\sqrt{x^3+1}\,dx$$

i wykonujemy podstawienie $t=x^3+1$ oraz formalnie $dt=3x^2\,dx$. Otrzymujemy

$$\int x^5\cdot\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\int x^3\cdot 3x^2\cdot\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\int (t-1)\cdot\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}\cdot\int t^{3/2}-\sqrt{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2\cdot t^{5/2}}{5}-\frac{2\cdot t^{3/2}}{3}\right)+C=\frac{2\cdot t^{5/2}}{15}-\frac{2\cdot t^{3/2}}{9}+C=\frac{2}{15}\cdot\left(x^3+1\right)^{5/2}-\frac{2}{9}\cdot\left(x^3+1\right)^{3/2}+C\,.$$

Korekta:

Przedstawione rozwiązanie jest poprawne przy założeniu, że $\sqrt{x^{10}}=x^5$, co jest prawdą tylko dla $x\geqslant 0$.

W przypadku $x<0$ mamy $\sqrt{x^{10}}=-x^5$, w związku z czym trzeba zmienić znak otrzymanej całki nieoznaczonej.

Po uwzględnieniu tej poprawki i zsynchronizowaniu stałych całkowania, otrzymujemy

$$\int \sqrt{x^{13}+x^{10}}\,dx=\begin{cases}\dfrac{2}{15}\cdot\left(x^3+1\right)^{5/2}-\dfrac{2}{9}\cdot\left(x^3+1\right)^{3/2}+C & \text{dla}\quad x\geqslant 0\\ -\dfrac{2}{15}\cdot\left(x^3+1\right)^{5/2}+\dfrac{2}{9}\cdot\left(x^3+1\right)^{3/2}+C-\dfrac{8}{45} & \text{dla}\quad x\in[-1,\,0)\end{cases}$$

Zadanie **9. (ZADANIE DODATKOWE)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{dx}{x^{73}+x^{37}}\,.$$

Rozwiązanie:
Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci
$$\int \frac{dx}{x^{73}+x^{37}}=\int \frac{x^{35}\,dx}{x^{108}+x^{72}}$$
nasuwa pomysł podstawienia $t=x^{36}$ i formalnie $dt=36x^{35}\,dx$, co prowadzi do
$$\int \frac{x^{35}\,dx}{x^{108}+x^{72}}=\frac{1}{36}\cdot\int \frac{dt}{t^3+t^2}\,.$$
Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:
$$\frac{1}{t^3+t^2}=\frac{1}{t^2\cdot(t+1)}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{D}{t+1}\,,$$
$$1=A\cdot(t+1)+B\cdot t\cdot(t+1)+D\cdot t^2\,,$$
$$1=A\cdot t+A+B\cdot t^2+B\cdot t+D\cdot t^2\,,$$
$$\begin{cases} 1 = A \\ 0 = A+B \\ 0 = B+D \end{cases}$$
Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy $A=D=1$ oraz $B=-1$. co pozwala dokończyć całkowanie
$$\frac{1}{36}\cdot\int \frac{dt}{t^3+t^2}=\frac{1}{36}\cdot\int \frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\,dt=\frac{1}{36}\cdot\left(-\frac{1}{t}-\ln|t|+\ln|t+1|\right)+C=$$
$$=\frac{1}{36}\cdot\left(-\frac{1}{x^{36}}-\ln\left(x^{36}\right)+\ln\left(x^{36}+1\right)\right)+C=-\frac{1}{36\cdot x^{36}}-\ln|x|+\frac{\ln\left(x^{36}+1\right)}{36}+C\,.$$

Sposób II

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$, czyli $t=1/x$, i formalnie $dx=-1/t^2\,dt$.
Otrzymujemy:
$$\int \frac{dx}{x^{73}+x^{37}}=-\int \frac{dt}{\left(t^{-73}+t^{-37}\right)\cdot t^2}=-\int \frac{t^{71}\,dt}{1+t^{36}}\,.$$
Po wykonaniu podstawienia $s=t^{36}$ i formalnie $t^{35}\,dt=ds/36$ kontynuujemy całkowanie:
$$-\int \frac{t^{71}\,dt}{1+t^{36}}=-\frac{1}{36}\cdot\int \frac{s\,ds}{1+s}=-\frac{1}{36}\cdot\int 1-\frac{1}{1+s}\,ds=-\frac{1}{36}\cdot(s-\ln|1+s|)+C=$$
$$=-\frac{s}{36}+\frac{1}{36}\cdot\ln|1+s|+C=-\frac{t^{36}}{36}+\frac{1}{36}\cdot\ln\left(1+t^{36}\right)+C=-\frac{x^{-36}}{36}+\frac{1}{36}\cdot\ln\left(1+x^{-36}\right)+C=$$
$$=-\frac{1}{36\cdot x^{36}}+\frac{1}{36}\cdot\ln\left(\frac{1+x^{36}}{x^{36}}\right)+C\,.$$

Sposób III

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$ jak w sposobie II, a następnie przekształcamy otrzymaną całkę:

$$-\int \frac{t^{71}\,dt}{1+t^{36}} = -\int t^{35} - \frac{t^{35}}{1+t^{36}}\,dt = \int -t^{35} + \frac{t^{35}}{1+t^{36}}\,dt = -\frac{t^{36}}{36} + \frac{1}{36}\cdot \ln\left(1+t^{36}\right) + C$$

i dalej porządkujemy jak w sposobie II.