KOLOKWIUM nr 1, 2.03.2023, godz. 8:15–9:45

Zadanie **1. (10 punktów)**

Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=|x|\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=0$ dla $x\in\{1,\,2\}$. Wyznaczyć $f(-1)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f''(x)=\begin{cases} -x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0] \\ x & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0] \\ \dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

Przy tym musi być $C_1=C_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=0$. Niech więc $C=C_1=C_2$.

Otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{6}+Cx+D_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0] \\ \dfrac{x^3}{6}+Cx+D_2 & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, musi być $D_1=D_2$, aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=0$. Niech dalej $D=D_1=D_2$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{6}+Cx+D & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0] \\ \dfrac{x^3}{6}+Cx+D & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

lub krócej

$$f(x)=\frac{|x|^3}{6}+Cx+D\,.$$

Warunki $f(1)=f(2)=0$ pozwalają wyznaczyć stałe C i D:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}+C+D = 0 \\ \dfrac{8}{6}+2C+D = 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań dostajemy $C=-7/6$ oraz $D=1$.

W konsekwencji

$$f(x)=\frac{|x|^3}{6}-\frac{7x}{6}+1 \qquad \text{oraz} \qquad f(-1)=\frac{1}{6}+\frac{7}{6}+1=\frac{7}{3}\,.$$

Zadanie **2. (10 punktów)**

Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{los} x = \operatorname{nos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{nos} x = \operatorname{sos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sos} x = \operatorname{los} x\,.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^x \cdot \operatorname{los} x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy szukaną całkę przez $I(x)$, a następnie całkujemy trzykrotnie przez części całkując e^x i różniczkując $\operatorname{los} x$. Otrzymujemy

$$I(x) = \int e^x \cdot \operatorname{los} x\, dx = e^x \cdot \operatorname{los} x - \int e^x \cdot \operatorname{nos} x\, dx = e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + \int e^x \cdot \operatorname{sos} x\, dx =$$

$$= e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + e^x \cdot \operatorname{sos} x - \int e^x \cdot \operatorname{los} x\, dx = e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + e^x \cdot \operatorname{sos} x - I(x)\,,$$

skąd

$$I(x) = \frac{e^x \cdot \operatorname{los} x - e^x \cdot \operatorname{nos} x + e^x \cdot \operatorname{sos} x}{2} + C\,.$$

Zadanie **3. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)^{19/10}}\,.$$

Rozwiązanie:
Całkujemy dwukrotnie przez części różniczkując czynnik x^2 i wykorzystając fakt, że potęgę dwumianu liniowego $x+1$ można wielokrotnie całkować:

$$\int x^2\cdot(x+1)^{-19/10}\,dx=-\frac{10}{9}\cdot x^2\cdot(x+1)^{-9/10}+\frac{20}{9}\int x\cdot(x+1)^{-9/10}\,dx=$$
$$=-\frac{10}{9}\cdot x^2\cdot(x+1)^{-9/10}+\frac{200}{9}\cdot x\cdot(x+1)^{1/10}-\frac{200}{9}\int 1\cdot(x+1)^{1/10}\,dx=$$
$$=-\frac{10}{9}\cdot x^2\cdot(x+1)^{-9/10}+\frac{200}{9}\cdot x\cdot(x+1)^{1/10}-\frac{2000}{99}\cdot(x+1)^{11/10}+C\,.$$

Uwaga: Całkę można też obliczyć wykonując podstawienie $t=x+1$.

Zadanie **4. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \ln\left(x^2+1\right)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\ln(x^2+1)$. Otrzymujemy:

$$\int \ln\left(x^2+1\right)\,dx = \int 1\cdot\ln\left(x^2+1\right)\,dx = x\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = x\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 2\int dx + 2\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C\,.$$