

Egzamin, **21.06.2023**, godz. 9:00–11:00**Zadanie 1 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[4]{x+1} dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

**Zadanie 2 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

**Zadanie 3 (10 punktów)**

Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left( x, \frac{x^{3/2}}{3} \right) : x \in [0, 5] \right\}.$$

**Zadanie 4 (10 punktów)**Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $p$ , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7 + x^5}} dx$$

jest zbieżna.

**Zadanie 5 (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3) \cdot (7n+4)}.$$

**Zadanie 6 (10 punktów)**

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n \cdot z^n}{(3n+2)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności (za **3 punkty**).

Zadanie **7** (ZADANIE DODATKOWE)

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

Zadanie **8** (ZADANIE DODATKOWE)

Udowodnić nierówność

$$\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n} > \frac{1}{2} + 10 \cdot \ln 10.$$