Egzamin, 21.06.2023, godz. 9:00–11:00

Zadanie **1** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^{0} x\cdot\sqrt[4]{x+1}\,dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[4]{x+1}, \qquad x=t^4-1$$

i formalnie

$$dx=4t^3\,dt.$$

Ponadto $x=-1$ odpowiada $t=0$, a $x=0$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-1,0]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,1]$.

Otrzymujemy

$$\int_{-1}^{0} x\cdot\sqrt[4]{x+1}\,dx=\int_{0}^{1}\left(t^4-1\right)\cdot t\cdot 4t^3\,dt=4\cdot\int_{0}^{1} t^8-t^4\,dt=4\cdot\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^5}{5}\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=$$

$$=4\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{5}\right)=4\cdot\frac{5-9}{45}=4\cdot\frac{-4}{45}=-\frac{16}{45}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-16/45$.

Zadanie **2 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\cdot \ln x\Big|_{x=1}^{4} - \int_1^4 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\, dx = 4\cdot\ln 4 - 2\cdot\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 8\cdot\ln 2 - \left(4\cdot\sqrt{x}\Big|_{x=1}^{4}\right) =$$

$$= 8\cdot\ln 2 - 8 + 4 = 8\cdot\ln 2 - 4\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $-4+8\cdot\ln 2$.

Zadanie **3 (10 punktów)**

Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x, \frac{x^{3/2}}{3}\right):\ x\in[0,5]\right\}.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)=\dfrac{x^{3/2}}{3}$ na przedziale $[a,b]=[0,5]$ otrzymujemy:

$$\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int\limits_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx=\int\limits_0^5 \sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^5 \sqrt{4+x}\,dx=$$

$$=\left.\frac{(x+4)^{3/2}}{3}\right|_{x=0}^{5}=\frac{1}{3}\cdot(27-8)=\frac{19}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu krzywa ma długość 19/3.

Zadanie **4 (10 punktów)**

Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx\,.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{0+x^5}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/3-p}} < +\infty\,,$$

o ile $5/3-p<1$, czyli $p>2/3$.

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx \geqslant \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^5+x^5}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/3-p}} = +\infty\,,$$

o ile $5/3-p\geqslant 1$, czyli $p\leqslant 2/3$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+0}}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{7/3-p}} < +\infty\,,$$

o ile $7/3-p>1$, czyli $p<4/3$.

Ponadto

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^5}}\,dx \geqslant \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^7+x^7}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\int_1^\infty \frac{dx}{x^{7/3-p}} = +\infty\,,$$

o ile $7/3-p\leqslant 1$, czyli $p\geqslant 4/3$.

Wniosek: Jeżeli $2/3<p<4/3$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p\in(2/3,\,4/3)$.

Zadanie **5 (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)\cdot(7n+4)} .$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{(7n-3)\cdot(7n+4)} = \frac{A}{7n-3} + \frac{B}{7n+4} .$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(7n-3)\cdot(7n+4)$ otrzymujemy

$$1 = A(7n+4) + B(7n-3) . \tag{$*$}$$

Dla $n=3/7$ otrzymujemy $A=1/7$, natomiast przyjęcie $n=-4/7$ daje $B=-1/7$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(7n-3)\cdot(7n+4)} = \frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{7n-3} - \frac{1}{7n+4}\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{39}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{7N-17}-\frac{1}{7N-10}\right)+\left(\frac{1}{7N-10}-\frac{1}{7N-3}\right)+\left(\frac{1}{7N-3}-\frac{1}{7N+4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7N+4}\right) ,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/28$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/28$.

Uwaga: Istotną częścią rozwiązania jest poprawne wykonanie przejścia granicznego, co można uzyskać tylko przez rozważanie sum częściowych.

Zadanie **6 (10 punktów)**

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n \cdot z^n}{(3n+2)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności (za **3 punkty**).

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego w zadaniu szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem z. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(2n+1)^n \cdot z^n}{(3n+2)^n}\right|} = \frac{(2n+1)\cdot|z|}{3n+2} \to \frac{2\cdot|z|}{3}.$$

Jeżeli $\frac{2\cdot|z|}{3} < 1$, czyli $|z| < \frac{3}{2}$, to dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{2\cdot|z|}{3} > 1$, czyli $|z| > \frac{3}{2}$, to dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego jest równy $\frac{3}{2}$.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu na okręgu bedacym brzegiem koła zbieżności, czyli dla $|z| = 3/2$. W tym przypadku rozważymy ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu:

$$\left|\frac{(2n+1)^n \cdot z^n}{(3n+2)^n}\right| = \frac{(2n+1)^n \cdot 3^n}{(3n+2)^n \cdot 2^n} = \frac{(6n+3)^n}{(6n+4)^n} = \left(1-\frac{1}{6n+4}\right)^n =$$

$$= \left(\left(1-\frac{1}{6n+4}\right)^{6n+4}\right)^{\frac{n}{6n+4}} \to \left(e^{-1}\right)^{1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}} \neq 0.$$

Ponieważ wartości bezwzględne wyrazów szeregu dążą do liczby różnej od zera, szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź: Obszarem zbieżności danego szeregu potęgowego jest koło o środku w zerze i promieniu 3/2 bez brzegu.

Zadanie **7** **(ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Podstawiając we wzorze
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n} \qquad x\in(-1,1]$$
wartość $x=-1/3$ otrzymujemy
$$\ln\frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n\cdot 3^n}\,,$$
skąd
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n} = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dany szereg ma sumę $\ln\frac{3}{2}$.

Zadanie **8 (ZADANIE DODATKOWE)**

Udowodnić nierówność

$$\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n} \ > \ \frac{1}{2}+10\cdot\ln 10\,.$$

Rozwiązanie:

Pole pod wykresem funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

na przedziale $[1, 10^{10}]$ jest równe

$$\int_1^{10^{10}} \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{x=1}^{10^{10}}=\ln 10^{10}=10\cdot\ln 10\,.$$

Obszar pod łamaną[1] o wierzchołkach $(n, 1/n)$ dla $n=1, 2, 3, \ldots, 10^{10}$ składa się z trapezów i ma pole równe

$$\sum_{n=1}^{10^{10}-1} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{10}}+\sum_{n=2}^{10^{10}-1}\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{10}}+\sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\,.$$

Z uwagi na wypukłość funkcji f opisana łamana leży nad wykresem[2] funkcji f, skąd wynika nierówność między polami rozważanych figur:

$$10\cdot\ln 10 \ < \ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 10^{10}}+\sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\,.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{2}+10\cdot\ln 10 \ < \ -\frac{1}{2\cdot 10^{10}}+\sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n} \ < \ \sum_{n=1}^{10^{10}}\frac{1}{n}\,.$$

[1] A dokładniej: obszar między łamaną i osią OX.

[2] A dokładniej: wierzchołki łamanej leżą na wykresie a wnętrza odcinków nad wykresem.