

372. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^2 - x^2}{(\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x) \cdot (y + x)}{(\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y - x)} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y + x}{\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{x + x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

373. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0, +\infty)$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę czwartych potęg otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{x}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y - x}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{1}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(2 \cdot \sqrt[4]{x}) \cdot (2 \cdot \sqrt{x})} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}. \end{aligned}$$

374. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^8 + 1}$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz pięciokrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[4]{y^8 + 1} - \sqrt[4]{x^8 + 1}}{y - x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^8 - x^8}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x) \cdot (y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+x) \cdot (x^2+x^2) \cdot (x^4+x^4)}{(\sqrt{x^8+1} + \sqrt{x^8+1}) \cdot (\sqrt[4]{x^8+1} + \sqrt[4]{x^8+1})} = \\
&= \frac{2x \cdot 2x^2 \cdot 2x^4}{2\sqrt{x^8+1} \cdot 2\sqrt[4]{x^8+1}} = \frac{2x^7}{(x^8+1)^{3/4}}.
\end{aligned}$$

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w **postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

$$375. \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad f'(1) = 1/3 \quad f'(8) = 1/12 \quad f'(27) = 1/27$$

$$376. \quad f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \quad f'(1) = -1/2 \quad f'(2) = -8/125 \quad f'(3) = -3/250$$

$$377. \quad f(x) = \ln(x^2+1) + \arctg 2 \quad f'(1) = 1 \quad f'(2) = 4/5 \quad f'(3) = 3/5$$

$$378. \quad f(x) = \ln(x^3+1) \quad f'(1) = 3/2 \quad f'(2) = 4/3 \quad f'(3) = 27/28$$

$$379. \quad f(x) = \arctg(x^2) \quad f'(1) = 1 \quad f'(2) = 4/17 \quad f'(3) = 3/41$$

$$380. \quad f(x) = \sqrt{24x+1} \quad f'(0) = 12 \quad f'(1) = 12/5 \quad f'(2) = 12/7$$

$$381. \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3-x+8} \quad f'(-1) = 1/6 \quad f'(0) = -1/12 \quad f'(1) = 1/6$$

$$382. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}} \quad f'(-1) = 1/27 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = -1/27$$

$$383. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}} \quad f'(-1) = -1/80 \quad f'(0) = 1/320 \quad f'(1) = -1/80$$

$$384. \quad f(x) = \sqrt{8x+1} \cdot \sqrt[3]{7x^2+1} \quad f'(0) = 4 \quad f'(1) = 37/6 \quad f'(3) = 303/40$$

385. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y = x^2$ oraz paraboli o równaniu $y = x^2 - 8x$.

Rozwiązanie:

Niech (a, a^2) i $(b, b^2 - 8b)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 - 8x$. Ponieważ $f'(x) = 2x$ oraz $g'(x) = 2x - 8$, równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 \quad \text{oraz} \quad y = (2b - 8) \cdot x - b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 2b - 8 \quad \text{oraz} \quad -a^2 = -b^2.$$

Z drugiego równania otrzymujemy $a = \pm b$, a ponieważ pierwsze równanie daje $b - a = 4 \neq 0$, musi być $a = -b$. Stąd $b = 2$ oraz $a = -2$.

W konsekwencji szukana prosta ma równanie

$$y = -4x - 4.$$

386. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = -x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, -b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = -x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = -2x,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = -2b \cdot x + b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = -2b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = b^2.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $b = -a$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $a = \pm 1$ oraz $b = \mp 1$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 2x + 1 \quad \text{oraz} \quad y = -2x + 1.$$

387. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = 2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, 2b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 2x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = 4x,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = 4b \cdot x - 2b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 4b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = -2b^2.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a = 2b$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $b = \pm 1$ oraz $a = \pm 2$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 4x - 2 \quad \text{oraz} \quad y = -4x - 2.$$

388. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + x^2} = 1.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze.

389. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnych jednostronnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{1 + x^2} = 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{1 + x^2} = -1. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze.

390. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2 + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2+1}-1} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{(\sqrt{h^2+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^2+1}+1)}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{h^2+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^2+1}+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2+1}-1} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{(\sqrt{h^2+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^2+1}+1)}}}{-|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{h^2+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^2+1}+1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja ta nie jest różniczkowalna w zerze.

391. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1+a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{-|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} - a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(0^+) = f'(0^-)$, czyli

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}},$$

co zachodzi dla $a = -1$.

Odpowiedź: Podana funkcja jest różniczkowalna w zerze dla $a = -1$.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

$$392. \quad f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}-1} \quad f_1'(0^-) = -1/\sqrt{2} \quad f_1'(0^+) = 1/\sqrt{2}$$

$$393. \quad f_2(x) = \sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1} \quad f_2'(0^-) = -1 \quad f_2'(0^+) = 1$$

$$394. \quad f_3(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+4}-2} \quad f_3'(0^-) = -1/2 \quad f_3'(0^+) = 1/2$$

$$395. \quad f_4(x) = \sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9} \quad f_4'(0^-) = -2/3 \quad f_4'(0^+) = 2/3$$

$$396. \quad f_5(x) = \sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1} \quad f_5'(0^-) = -1/\sqrt{2} \quad f_5'(0^+) = 1/\sqrt{2}$$

$$397. \quad f_6(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2} \quad f_6'(0^-) = -1/(4\sqrt{2}) \quad f_6'(0^+) = 1/(4\sqrt{2})$$

$$398. \quad f_7(x) = \sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3} \quad f_7'(0^-) = -(\sqrt{2})/(3\sqrt{3}) \quad f_7'(0^+) = (\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$$

399. Funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Obliczyć $g'(100)$.

Rozwiązanie:

Niech f_n będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji f . Udowodnimy przez indukcję, że

$$f_n(x) = (\sqrt{x+n})^2.$$

1° Zauważmy, że

$$f_1(x) = f(x) = (\sqrt{x+1})^2,$$

zatem dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

2° Zakładając

$$f_n(x) = (\sqrt{x+n})^2,$$

otrzymujemy

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = f\left((\sqrt{x+n})^2\right) = \left(\sqrt{(\sqrt{x+n})^2+1}\right)^2 = (\sqrt{x+n+1})^2,$$

co kończy zasadniczą część dowodu indukcyjnego.

Ponieważ $g = f_{100}$,

$$g'(x) = \frac{d}{dx} (\sqrt{x} + 100)^2 = 2 \cdot (\sqrt{x} + 100) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 100}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{x}},$$

skąd $g'(100) = 11$.

400. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg}51 - \operatorname{arctg}49 < \frac{1}{1201}.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg}x$ na przedziale $[49, 51]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (49, 51)$, że

$$\operatorname{arctg}51 - \operatorname{arctg}49 = (51 - 49) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $49 < c < 51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301} = \frac{2}{2602} = \frac{2}{51^2 + 1} < \operatorname{arctg}51 - \operatorname{arctg}49 = \frac{2}{c^2 + 1} < \frac{2}{49^2 + 1} = \frac{2}{2402} = \frac{1}{1201},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

401. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[8, 9]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 9)$, że

$$\ln 9 - \ln 8 = f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

z nierówności $8 < c < 9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 = f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{8},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

402. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{34} < \operatorname{arctg}13 - \operatorname{arctg}8 < \frac{1}{13}.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg}x$ na przedziale $[8, 13]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 13)$, że

$$\operatorname{arctg}13 - \operatorname{arctg}8 = (13 - 8) \cdot f'(c) = 5 \cdot f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $8 < c < 13$ otrzymujemy

$$\frac{1}{34} = \frac{5}{170} = \frac{5}{13^2 + 1} < \operatorname{arctg}13 - \operatorname{arctg}8 = \frac{5}{c^2 + 1} < \frac{5}{8^2 + 1} = \frac{5}{65} = \frac{1}{13},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

403. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg}6 + \operatorname{arctg}12 < \operatorname{arctg}7 + \operatorname{arctg}10.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (oficjalny):

Podana nierówność może być przepisana w postaci

$$\operatorname{arctg}12 - \operatorname{arctg}10 < \operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}6.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg}x$ na przedziałach $[6, 7]$ oraz $[10, 12]$ wynika istnienie takich liczb $c \in (6, 7)$ oraz $d \in (10, 12)$, że

$$\operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}6 = f'(c).$$

oraz

$$\operatorname{arctg}12 - \operatorname{arctg}10 = 2 \cdot f'(d).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $6 < c < 7$ oraz $10 < d < 12$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{50} < \operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}6 = f'(c) = \frac{1}{c^2 + 1} < \frac{1}{37}$$

oraz

$$\frac{2}{145} < \operatorname{arctg}12 - \operatorname{arctg}10 = 2 \cdot f'(d) = \frac{2}{d^2 + 1} < \frac{2}{101}.$$

W konsekwencji

$$\operatorname{arctg}12 - \operatorname{arctg}10 < \frac{2}{101} < \frac{2}{100} = \frac{1}{50} < \operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}6,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Sposób II (rachunkowy):

Niech

$$f(x) = \operatorname{arctg}(6 + x) + \operatorname{arctg}(12 - 2x)$$

będzie funkcją, która dla $x=0$ i $x=1$ przyjmuje wartości równe odpowiednio lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0, 1)$, a do tego wystarczy wykazać dodatniość jej pochodnej na tym przedziale. Miłośnicy rachunków bez trudu stwierdzą, że

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(6+x)^2+1} + \frac{-2}{(12-2x)^2+1} = \frac{2x^2-72x+71}{((6+x)^2+1) \cdot ((12-2x)^2+1)} = \\ &= \frac{2x^2-4x-68x+2+68+1}{((6+x)^2+1) \cdot ((12-2x)^2+1)} = \frac{2 \cdot (x-1)^2 + 68 \cdot (1-x) + 1}{((6+x)^2+1) \cdot ((12-2x)^2+1)}, \end{aligned}$$

co wobec dodatniości ostatniego wyrażenia dla $x \leq 1$ kończy rozwiązanie zadania.

Sposób III (wymaga znajomości pewnej sztuczki):

Skorzystamy z tego, że $\arctg x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ix$ oraz z faktu, że przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

Wobec tego $\arctg 6 + \arctg 12$ jest argumentem liczby

$$(1+6i) \cdot (1+12i) = 1+18i-72 = -71+18i = 71 \cdot \left(-1 + \frac{18}{71} \cdot i\right),$$

natomiast $\arctg 7 + \arctg 10$ jest argumentem liczby

$$(1+7i) \cdot (1+10i) = 1+17i-70 = -69+17i = 69 \cdot \left(-1 + \frac{17}{69} \cdot i\right).$$

Zatem lewa i prawa strona dowodzonej nierówności są równe odpowiednio argumentom liczb

$$-1 + \frac{18}{71} \cdot i \quad \text{oraz} \quad -1 + \frac{17}{69} \cdot i.$$

Wobec tego dowodzona nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{18}{71} > \frac{17}{69},$$

którą możemy wykazać następująco:

$$\frac{18}{71} > \frac{18}{72} = \frac{1}{4} = \frac{17}{68} > \frac{17}{69}.$$

Uwagi: Ponieważ argumentem liczby zespolonej $-1 + \frac{1}{4} \cdot i = -\left(1 - \frac{1}{4} \cdot i\right)$ jest liczba

$$\pi - \arctg\left(\frac{1}{4}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arctg 4\right) = \frac{\pi}{2} + \arctg 4,$$

faktycznie udowodniliśmy nierówności

$$\arctg 6 + \arctg 12 < \frac{\pi}{2} + \arctg 4 < \arctg 7 + \arctg 10.$$

Zwróćmy też uwagę, że postępując podobnie jak powyżej, strony dowodzonej nierówności można zapisać jako:

$$\arctg 6 + \arctg 12 = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{71}{18}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(4 - \frac{1}{18}\right)$$

oraz

$$\arctg 7 + \arctg 10 = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{69}{17}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(4 + \frac{1}{17}\right).$$

Metodami podobnymi do powyższych można udowodnić nierówności równoważne danej w zadaniu nierówności:

$$\operatorname{arctg}12 - \operatorname{arctg}10 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{121}\right) < \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{86}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{43}\right) = \operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}6,$$

$$\operatorname{arctg}12 - \operatorname{arctg}7 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{17}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{68}\right) < \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{61}\right) = \operatorname{arctg}10 - \operatorname{arctg}6$$

oraz

$$\operatorname{arctg}12 - \operatorname{arctg}10 - \operatorname{arctg}7 + \operatorname{arctg}6 = \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{1041}\right) > 0.$$

404. Udowodnić nierówność

$$26 \cdot e^{\operatorname{arctg}5} < 25 \cdot e^{\operatorname{arctg}7}.$$

Rozwiązanie:

Dowodzona nierówność po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e przyjmuje postać

$$\ln 26 + \operatorname{arctg}5 < \ln 25 + \operatorname{arctg}7,$$

co można przepisać jako

$$\ln 26 - \ln 25 < \operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}5.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[25, 26]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (25, 26)$, że

$$\ln 26 - \ln 25 = (26 - 25) \cdot f'(c) = f'(c).$$

Ponadto z twierdzenia Lagrange'a zastosowanego do funkcji $g(x) = \operatorname{arctg}x$ na przedziale $[5, 7]$ wynika istnienie takiej liczby $d \in (5, 7)$, że

$$\operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}5 = (7 - 5) \cdot g'(d) = 2 \cdot g'(d).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

oraz

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $25 < c < 26$ oraz $5 < d < 7$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{26} < \ln 26 - \ln 25 = f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{25}$$

oraz

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} < \operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}5 = 2 \cdot g'(d) = \frac{2}{d^2 + 1} < \frac{2}{26} = \frac{1}{13}.$$

W konsekwencji

$$\ln 26 - \ln 25 < \frac{1}{25} < \operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}5,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

405. Dana jest funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[\pi]{x^\pi + \pi}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedziona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} (x^\pi + \pi)^{1/\pi - 1} \cdot \pi x^{\pi - 1} \right| = \frac{x^{\pi - 1}}{(x^\pi + \pi)^{1 - 1/\pi}} = \frac{x^{\pi - 1}}{(x^\pi + \pi)^{(\pi - 1)/\pi}} = \frac{(x^\pi)^{(\pi - 1)/\pi}}{(x^\pi + \pi)^{(\pi - 1)/\pi}} = \\ &= \left(\frac{x^\pi}{x^\pi + \pi} \right)^{(\pi - 1)/\pi} < 1, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

406. Dana jest funkcja $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedziona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{10x}{\sqrt{10x^2 + 9000}} \right| = \frac{10 \cdot |x|}{\sqrt{10x^2 + 9000}} = \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{x^2}}} \leq \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{10^2}}} = \frac{10}{\sqrt{10 + 90}} = \frac{10}{10} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

407. Dana jest funkcja $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedziona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 2.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 125}} \right| = \frac{5 \cdot |x|}{\sqrt{5x^2 + 125}} = \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{x^2}}} \leq \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{10^2}}} = \frac{5}{\sqrt{6,25}} = \frac{5}{2,5} = 2,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

408. Dana jest funkcja $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedziona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Dla $x = 0$ powyższa nierówność jest oczywista wobec $f'(0) = 0$, a dla $x \neq 0$ bezpośrednio wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 1$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2}} \right| = \frac{2 \cdot |x|}{\sqrt{2x^2 + 2}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{2}{1^2}}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

409. Dana jest funkcja $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{x^2+9} - \sqrt{y^2+9} \right| \leq \frac{4}{5} \cdot |x-y|.$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2+9} - \sqrt{y^2+9} \right| &= \left| \sqrt{x^2+9} - \sqrt{y^2+9} \right| \cdot \frac{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}} = |x-y| \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}}. \end{aligned}$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}} \leq \frac{4}{5},$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y| \leq \frac{4}{5} \cdot (\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}).$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2 \leq 16$ i $y^2 \leq 16$:

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9y^2}{25} + \frac{16y^2}{25}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16y^2}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (x^2+9)} + \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (y^2+9)} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot (\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}). \end{aligned}$$

Sposób II:

Dla $x = y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y|,$$

gdzie c leży między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby $x \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{5}.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+9}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}},$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x = 0$, natomiast dla $x \neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5}.$$

410. Niech funkcja $f : [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{256}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 4$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} \right| = \left| \frac{y^4 - x^4}{x^4 y^4} \right| = \frac{|x - y| \cdot (x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3)}{x^4 y^4} = \\ &= |x - y| \cdot \left(\frac{x^3}{x^4 y^4} + \frac{x^2 y}{x^4 y^4} + \frac{x y^2}{x^4 y^4} + \frac{y^3}{x^4 y^4} \right) = |x - y| \cdot \left(\frac{1}{x y^4} + \frac{1}{x^2 y^3} + \frac{1}{x^3 y^2} + \frac{1}{x^4 y} \right) \leq \\ &\leq |x - y| \cdot \left(\frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^5} \right) = |x - y| \cdot \frac{4}{4^5} = |x - y| \cdot \frac{1}{4^4} = |x - y| \cdot \frac{1}{256}, \end{aligned}$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 4$.

Nieco inna postać oszacowań:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} \right| = \left| \frac{y^4 - x^4}{x^4 y^4} \right| = \frac{|x - y| \cdot (x + y) \cdot (x^2 + y^2)}{x^4 y^4} = |x - y| \cdot \frac{x + y}{xy} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^3 y^3} = \\ &= |x - y| \cdot \left(\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^3 y^3} + \frac{y^2}{x^3 y^3} \right) = |x - y| \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x y^3} + \frac{1}{x^3 y} \right) \leq \\ &\leq |x - y| \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^4} \right) = |x - y| \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4^4} = |x - y| \cdot \frac{1}{4^4} = |x - y| \cdot \frac{1}{256}. \end{aligned}$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x = y$, natomiast dla $x \neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y , a więc spełniająca nierówność $c > 4$, że

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| = \left| \frac{-4}{c^5} \right| = \frac{4}{c^5} < \frac{4}{4^5} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256},$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

411. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x}).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą pomiędzy x i y .

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)| \leq 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x , co dowodzimy następująco:

$$|f'(x)| = \left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| = \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{|e^x| + |-e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1.$$

412. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedziona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością między średnimi geometryczną i arytmetyczną prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = \frac{\sqrt{x^2 \cdot 1}}{\frac{x^2 + 1}{2}} \leq 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

413. Funkcja różniczkowalna $f: (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ spełnia warunki $f(1) = -2/3$ oraz $f(2) = -2/5$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x , że

$$f'(x) = (f(x))^2.$$

Wskazówka: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $g: (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ określoną wzorem $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Wówczas $g(1) = -3/2$ i $g(2) = -5/2$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c \in (1, 2)$, że

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \frac{-5/2 - (-3/2)}{1} = -1.$$

Z drugiej strony

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2},$$

skąd

$$-\frac{f'(c)}{(f(c))^2} = -1,$$

czyli

$$f'(c) = (f(c))^2.$$

414. Funkcja różniczkowalna $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia warunki $f(2) = 1$ i $f(4) = 4$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x , że

$$f'(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Wskazówka: $g(x) = 2 \cdot \sqrt{f(x)}$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ określoną wzorem $g(x) = 2 \cdot \sqrt{f(x)}$. Wówczas $g(2) = 2$ i $g(4) = 4$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c \in (2, 4)$, że

$$g'(c) = \frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = 1.$$

Z drugiej strony

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}},$$

skąd

$$\frac{f'(c)}{\sqrt{f(c)}} = 1,$$

czyli

$$f'(c) = \sqrt{f(c)}.$$

415. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - 3 \cdot |x + 1|$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in [-1, +\infty) \\ -x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 3 & \text{dla } x \in [-1, 2] \\ x^2 + 3x + 3 & \text{dla } x \in [-2, -1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in (-2, -1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1, 2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $2x - 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1, 2)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1 .

$$f(-2) = 1,$$

$$f(-3/2) = 3/4,$$

$$f(-1) = 1,$$

$$f(3/2) = -21/4 = -5,25,$$

$$f(2) = -5.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-21/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą 1 w punktach -2 oraz -1 .

416. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x^2 - 6| = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty) \\ -x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 - 6 & \text{dla } x \in [-4, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3] \\ x - x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{dla } x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3) \\ 1 - 2x & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $1 + 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $1 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -4 i 3 ,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} f(-4) &= 6, \\ f(-\sqrt{6}) &= -\sqrt{6}, \\ f(1/2) &= 6,25, \\ f(\sqrt{6}) &= \sqrt{6}, \\ f(3) &= 6. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25 = 25/4$ w punkcie $1/2$.

417. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 6|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2).$$

Stąd

$$|x^2 - x - 6| = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{dla } x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty) \\ -x^2 + x + 6 & \text{dla } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{dla } x \in [-5, -2] \cup [3, 5] \\ -x^2 + 2x + 6 & \text{dla } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5, 5]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (-5, -2) \cup (3, 5) \\ -2x + 2 & \text{dla } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

W punktach -2 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-5, -2) \cup (3, 5)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5, -2) \cup (3, 5)$.

2° W przypadku $x \in (-2, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-2x + 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, 3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -2 i 3 .

$$f(-5) = 19,$$

$$f(-2) = -2,$$

$$f(1) = 7,$$

$$f(3) = 3,$$

$$f(5) = 19.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie -2 , a wartość największą równą 19 w punktach -5 i 5 .

418. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in [-1/2, +\infty) \\ -2x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1/2) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{dla } x \in [-1/2, 3] \\ x^2 + 2x + 1 & \text{dla } x \in [-3, -1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{dla } x \in (-1/2, 3) \\ 2x + 2 & \text{dla } x \in (-3, -1/2) \end{cases}$$

W punkcie $-1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/2, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $2x - 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/2, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-3, -1/2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, -1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -3 i 3 ,
- miejsca zerowe pochodnej: -1 i 1 ,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/2$.

$$f(-3) = 4,$$

$$f(-1) = 0,$$

$$f(-1/2) = 1/4 = 0,25,$$

$$f(1) = -2,$$

$$f(3) = 2.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie 1 , a wartość największą równą 4 w punkcie -3 .

419. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągnięte.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2 = \sqrt{(3x + 1)^2} - x^2 = |3x + 1| - x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - x^2 & \text{dla } x \in [-1/3, 3] \\ -3x - 1 - x^2 & \text{dla } x \in [-2, -1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{dla } x \in (-1/3, 3) \\ -3-2x & \text{dla } x \in (-2, -1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/3, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1/3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-3 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 3 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2) = 1,$$

$$f(-3/2) = 5/4,$$

$$f(-1/3) = -1/9,$$

$$f(3/2) = 13/4,$$

$$f(3) = 1.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/9$ w punkcie $-1/3$, a wartość największą równą $13/4$ w punkcie $3/2$.

420. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^3 - 9x = (x - 3) \cdot x \cdot (x + 3).$$

Stąd

$$|x^3 - 9x| = \begin{cases} x^3 - 9x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty) \\ -x^3 + 9x & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, \sqrt{10}] \\ -x^3 + 12x & \text{dla } x \in [-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, \sqrt{10}]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10}) \\ -3x^2 + 12 & \text{dla } x \in (-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W punktach $-3, 0$ i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 6$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = -\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$.

2° W przypadku $x \in (-4, -3) \cup (0, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 12$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm 2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = 2$, należy do rozważanego zbioru $(-4, -3) \cup (0, 3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:

- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-3, 0$ i 3 .

$$f(-4) = 16, \quad f(-3) = -9, \quad f(0) = 13, \quad f(2) = 16, \quad f(3) = 9,$$

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 + 6 \cdot \sqrt{2} = -2 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \in (4, 8), \quad \text{bo } \sqrt{2} \in (1, 2),$$

$$f(\sqrt{10}) = (\sqrt{10})^3 - 6 \cdot \sqrt{10} = 10 \cdot \sqrt{10} - 6 \cdot \sqrt{10} = 4 \cdot \sqrt{10} \in (12, 16), \quad \text{bo } \sqrt{10} \in (3, 4).$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3 , a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2 .

421. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4} = 2x + \sqrt{(x^2 - 49)^2} = 2x + |x^2 - 49|, \quad (1)$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 49 & \text{dla } x \in [-11, -7] \cup [7, 9] \\ 2x - x^2 + 49 & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \quad (2)$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-11, 9]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{dla } x \in (-11, -7) \cup (7, 9) \\ 2 - 2x & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \quad (3)$$

W punktach ± 7 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-11, -7) \cup (7, 9)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2 + 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1$, które **nie należy** do rozważanego zbioru $(-11, -7) \cup (7, 9)$.

2° W przypadku $x \in (-7, 7)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które **należy** do rozważanego przedziału $(-7, 7)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -11 i 9 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -7 i 7 .

$$f(-11) = 50,$$

$$f(-7) = -14,$$

$$f(1) = 50,$$

$$f(7) = 14,$$

$$f(9) = 50.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -14 w punkcie -7 , a wartość największą równą 50 w punktach -11 , 1 i 9 .

422. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \arctg x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{99} - \frac{10 \cdot 2x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{99 \cdot (x^2 + 1)} - \frac{20x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{99}{99 \cdot (x^2 + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - 20x + 100}{99 \cdot (x^2 + 1)} = \frac{(x - 10)^2}{99 \cdot (x^2 + 1)} \geq 0, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9 , a największą na końcu, czyli w punkcie 11 .

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się

pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} f(9) &= \frac{1}{11} - \frac{10 \cdot \ln 82}{99} + \arctg 9 \approx \mathbf{1,105925}, \\ f(10) &= \frac{10}{99} - \frac{10 \cdot \ln 101}{99} + \arctg 10 \approx \mathbf{1,105964}, \\ f(11) &= \frac{1}{9} - \frac{10 \cdot \ln 122}{99} + \arctg 11 \approx \mathbf{1,105993}. \end{aligned}$$

423. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} = \frac{4x^2 - 36x + 81}{4x^3} = \frac{(2x-9)^2}{4x^3} \geq 0,$$

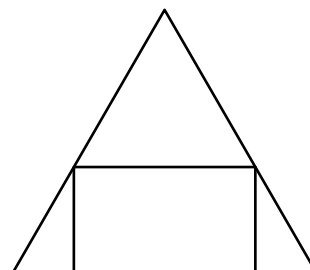
przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{207}{128} + \ln 4 \approx 3,00348, \\ f(9/2) &= \frac{3}{2} + \ln(9/2) \approx 3,00408, \\ f(5) &= \frac{279}{200} + \ln 5 \approx 3,00444. \end{aligned}$$

424. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością. Jeżeli walec ma wysokość $x \in (0, h)$, to jego podstawa ma promień $r \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas objętość walca jest równa

$$V(x) = \pi \cdot x \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow h^-} V(x) = 0,$$

a ponadto

$$\begin{aligned} V'(x) &= \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2\pi \cdot x \cdot r^2}{h} \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \left(1 - \frac{x}{h} - \frac{2x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{3x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right). \end{aligned}$$

Wobec tego $V'(x) = 0$ dla $x = h/3$, co prowadzi do maksymalnej objętości walca równej

$$V(h/3) = \pi \cdot \frac{h}{3} \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{h/3}{h}\right)^2 = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że stożek ma objętość $1 = \pi r^2 h/3$.

Odpowiedź: Największa możliwa objętość walca wynosi $4/9$.

425. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$ i $x = 1$ oraz parabolą o równaniu $y = x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?

Rozwiązanie:

Niech (a, a^2) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a) = (1 - a) \cdot a^2 = a^2 - a^3.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

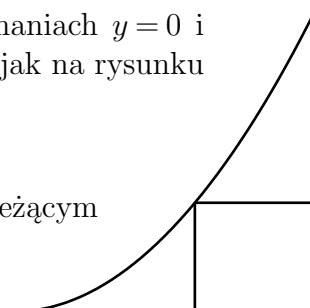
a ponadto

$$P'(a) = 2a - 3a^2.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 2/3$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $4/27$.



Uwaga: Używając odpowiedniej wersji¹ nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną można uniknąć różniczkowania.

Mamy bowiem

$$P(a) = (1-a) \cdot a^2 = 4 \cdot (1-a) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2},$$

gdzie otrzymaliśmy iloczyn trzech czynników dodatnich o stałej sumie równej 1, a taki iloczyn jest największy, gdy wszystkie trzy czynniki są równe, czyli równe $1/3$.

426. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?

Rozwiązanie:

Niech (a, a^3) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a) = (1-a) \cdot a^3 = a^3 - a^4.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

a ponadto

$$P'(a) = 3a^2 - 4a^3.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 3/4$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{64} = \frac{27}{256}.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $27/256$.

427. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{C},$$

gdzie $C = 6$ (**wersja trudniejsza**) lub $C = 3$ (**wersja łatwiejsza**).

Rozwiązanie:

Rozwiązanie wersji łatwiejszej:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2 + b^2),$$

¹ $xyz \leq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3}$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 12}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 12}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 12} - \sqrt[4]{y^2 + 12} \right| = \left| \frac{(x^2 + 12) - (y^2 + 12)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}\right)\left(\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}\right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}\right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}\right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}} < 1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 12} + \sqrt[4]{0 + 12}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{12}}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}\right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 12} + \sqrt[4]{y^2 + 12}} \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{y^2 + 12}} \leq \\ &\leq |x - y| \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{12}} \cdot 1 = \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{16 \cdot 12}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{9 \cdot 9}} = \frac{|x - y|}{3}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie wersji trudniejszej:

Pominąwszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y .

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)| \leq 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Przyjmując²

$$g(x) = f'(x) = \frac{x}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}}$$

²W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu, gdyż to pojęcie nie pojawiło się jeszcze na wykładzie.

otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{-1/2}}{2 \cdot (1 + 12 \cdot x^{-2})^{3/4}} = 0.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}} - \frac{3x^2}{4 \cdot (x^2 + 12)^{7/4}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}} &= \frac{3x^2}{4 \cdot (x^2 + 12)^{7/4}}, \\ 2 \cdot (x^2 + 12) &= 3x^2, \\ 2 \cdot 12 &= x^2, \\ x &= \pm 2 \cdot \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g(\pm 2 \cdot \sqrt{6}) = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot \left((\pm 2 \cdot \sqrt{6})^2 + 12 \right)^{3/4}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 36^{3/4}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6^{3/2}} = \pm \frac{1}{6}.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/6$ i $1/6$, skąd $|g(x)| \leq 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

428. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (2, 4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x} > \sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Niech $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

Wówczas

$$f'(x) = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x < e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > e$.

Wobec tego funkcja f jest rosnąca w przedziale $[2, e]$ i malejąca w przedziale $[e, 4]$, a ponieważ $f(2) = f(4) = \sqrt{2}$, otrzymujemy $\sqrt[x]{x} > \sqrt{2}$ dla $x \in (2, 4)$.

429. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = 5 \sin x - \sin 5x.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 2π i różniczkowalna, wystarczy porównać wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej znajdujących się w przedziale $[0, 2\pi)$.

Skoro

$$f'(x) = 5 \cos x - 5 \cos 5x,$$

równanie $f'(x) = 0$ jest równoważne równaniu

$$\cos x = \cos 5x.$$

Ponieważ równość

$$\cos x = \cos y$$

jest równoważna istnieniu liczby całkowitej k i znaku \pm takich, że

$$y = 2k\pi \pm x,$$

otrzymujemy równanie

$$5x = 2k\pi \pm x,$$

czyli

$$(5 \mp 1) \cdot x = 2k\pi.$$

Wobec tego

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{k\pi}{3},$$

co w połączeniu z warunkiem $x \in [0, 2\pi)$ prowadzi do ośmiu miejsc zerowych pochodnej w jednym okresie.

Sprawdzając wartości funkcji f w tych ośmiu punktach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f(\pi/3) = 3\sqrt{3}, \quad f(\pi/2) = 4, \quad f(2\pi/3) = 3\sqrt{3}, \\ f(\pi) = 0, \quad f(4\pi/3) = -3\sqrt{3}, \quad f(3\pi/2) = -4, \quad f(5\pi/3) = -3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji f jest równa $3\sqrt{3}$.

430. Niech $f(x) = 4\cos x + \sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0, 2\pi)$.

Odpowiedź:

$$\frac{\pi}{10}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{10}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{13\pi}{10}, \quad \frac{17\pi}{10}, \quad \frac{11\pi}{6}.$$

431. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 \quad \text{czy} \quad 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x) = 16\operatorname{arctg} x - \ln(x^2 + 1)$.

Rozwiązanie:

Różniczkując podaną we wskazówce funkcję pomocniczą otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{16}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2(8 - x)}{x^2 + 1} > 0$$

dla $x < 8$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 8]$. W szczególności $f(7) < f(8)$, skąd dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned} 16 \cdot \operatorname{arctg} 7 - \ln 50 &< 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 - \ln 65, \\ 16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 65 &< 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 50, \\ 16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 + \ln 5 &< 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 + \ln 5, \end{aligned}$$

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 < 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10.$$

Odpowiedź: Większa jest liczba $16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0, \infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

432. $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$ **3/8**

433. $f(x) = 4\sqrt{x} - x^2$ **3**

434. $f(x) = 32\sqrt{x} - x^2$ **48**

435. $f(x) = 4\sqrt{x} - 27x^2$ **1**

436. $f(x) = 32\sqrt{x} - 27x^2$ **16**

437. $f(x) = 4\sqrt{x} - 125x^2$ **3/5**

438. $f(x) = 6\sqrt{x} - x^3$ **5**

439. $f(x) = 3\sqrt{x} - 16x^3$ **5/4**

440. $f(x) = 8\sqrt{x} - x^4$ **7**

441. $f(x) = \sqrt{x} - 16x^4$ **7/16**