Kolokwium nr 4: wtorek 20.12.2022, godz. 10:15-11:45, materiał zad. 1–441.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 12.12.2022, środę 14.12.2022 i poniedziałek 19.12.2022.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

9. Pochodna funkcji

372. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

373. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

374. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^8+1}$.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

375. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $f'(1)=\ldots\ldots$ $f'(8)=\ldots\ldots$ $f'(27)=\ldots\ldots$

376. $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ $f'(1)=\ldots\ldots$ $f'(2)=\ldots\ldots$ $f'(3)=\ldots\ldots$

377. $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}2$ $f'(1)=\ldots$ $f'(2)=\ldots$ $f'(3)=\ldots$

378. $f(x)=\ln\left(x^3+1\right)$ $f'(1)=\ldots\ldots$ $f'(2)=\ldots\ldots$ $f'(3)=\ldots\ldots$

379. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ $f'(1)=\ldots\ldots$ $f'(2)=\ldots\ldots$ $f'(3)=\ldots\ldots$

380. $f(x)=\sqrt{24x+1}$ $f'(0)=\ldots\ldots$ $f'(1)=\ldots\ldots$ $f'(2)=\ldots\ldots$

381. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$ $f'(-1)=\ldots\ldots$ $f'(0)=\ldots\ldots$ $f'(1)=\ldots\ldots$

382. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$ $f'(-1)=\ldots\ldots$ $f'(0)=\ldots\ldots$ $f'(1)=\ldots\ldots$

383. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$ $f'(-1)=\ldots\ldots$ $f'(0)=\ldots\ldots$ $f'(1)=\ldots\ldots$

384. $f(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$ $f'(0)=\ldots$ $f'(1)=\ldots$ $f'(3)=\ldots$

385. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y=x^2$ oraz paraboli o równaniu $y=x^2-8x$.

386. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=-x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

387. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

388. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

389. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

390. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

391. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

392. $f_1(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ $f_1'(0^-)=$ .... $f_1'(0^+)=$ ....

393. $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$ $f_2'(0^-)=$ .... $f_2'(0^+)=$ ....

394. $f_3(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$ $f_3'(0^-)=$ .... $f_3'(0^+)=$ ....

395. $f_4(x)=\sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$ $f_4'(0^-)=$ .... $f_4'(0^+)=$ ....

396. $f_5(x)=\sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$ $f_5'(0^-)=$ .... $f_5'(0^+)=$ ....

397. $f_6(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ $f_6'(0^-)=$ .... $f_6'(0^+)=$ ....

398. $f_7(x)=\sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$ $f_7'(0^-)=$ .... $f_7'(0^+)=$ ....

399. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=1+x+2\sqrt{x}\,.$$

Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Obliczyć $g'(100)$.

400. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301}<\operatorname{arctg}51-\operatorname{arctg}49<\frac{1}{1201}\,.$$

401. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{9}<\ln 9-\ln 8<\frac{1}{8}\,.$$

402. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{34}<\operatorname{arctg}13-\operatorname{arctg}8<\frac{1}{13}\,.$$

403. Udowodnić nierówność
$$\operatorname{arctg}6+\operatorname{arctg}12<\operatorname{arctg}7+\operatorname{arctg}10\,.$$

404. Udowodnić nierówność
$$26\cdot e^{\operatorname{arctg}5}<25\cdot e^{\operatorname{arctg}7}\,.$$

405. Dana jest funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+\pi}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

406. Dana jest funkcja $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{10x^2+9000}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[-10,10]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

407. Dana jest funkcja $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{5x^2+125}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[-10,10]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2\cdot|x-y|\,.$$

408. Dana jest funkcja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{2x^2+2}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[-1,1]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

409. Dana jest funkcja $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{x^2+9}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[-4,4]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\,.$$

410. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x)=\frac{1}{x^4}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{256}\,.$$

411. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

412. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

413. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ spełnia warunki $f(1)=-2/3$ oraz $f(2)=-2/5$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że
$$f'(x)=(f(x))^2\,.$$

Wskazówka: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

414. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=1$ i $f(4)=4$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że
$$f'(x)=\sqrt{f(x)}\,.$$

Wskazówka: $g(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}$

415. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x^2-3\cdot|x+1|$$
na przedziale $[-2,2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

416. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$
na przedziale $[-4,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

417. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-x-6\right|$$
na przedziale $[-5,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

418. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x^2-\sqrt{4x^2+4x+1}$$
na przedziale $[-3,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

419. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

420. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$

na przedziale $\left[-4, \sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

421. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}$$

na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

422. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln(x^2+1)}{99}+\mathrm{arctg}x$$

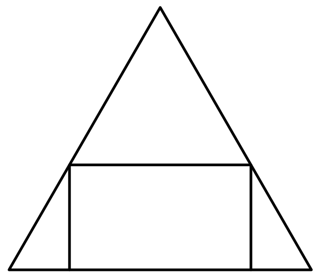
osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

423. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

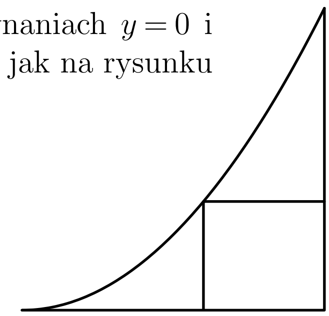
$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

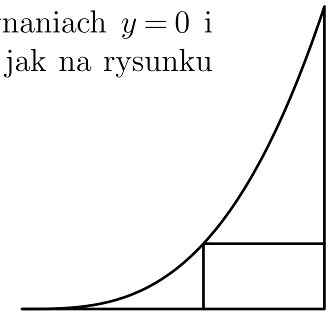
424. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



425. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



426. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



427. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C},$$

gdzie $C=6$ **(wersja trudniejsza)** lub $C=3$ **(wersja łatwiejsza).**

428. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$.

429. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=5\sin x-\sin 5x.$$

430. Niech $f(x)=4\cos x+\sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0,2\pi)$.

431. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16\cdot\mathrm{arctg}7+\ln 13 \qquad \text{czy} \qquad 16\cdot\mathrm{arctg}8+\ln 10\ ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.
Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x)=16\mathrm{arctg}x-\ln(x^2+1)$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0,\infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

432. $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$ ....

433. $f(x)=4\sqrt{x}-x^2$ ....

434. $f(x)=32\sqrt{x}-x^2$ ....

435. $f(x)=4\sqrt{x}-27x^2$ ....

436. $f(x)=32\sqrt{x}-27x^2$ ....

437. $f(x)=4\sqrt{x}-125x^2$ ....

438. $f(x)=6\sqrt{x}-x^3$ ....

439. $f(x)=3\sqrt{x}-16x^3$ ....

440. $f(x)=8\sqrt{x}-x^4$ ....

441. $f(x)=\sqrt{x}-16x^4$ ....