Zadania do omówienia na ćwiczeniach w środę 7.12.2022.

363. Dobierając odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leqslant 6\cdot C\,.$$

364. Dowieść, że równanie $\cos x = x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

365. Dowieść, że równanie $\cos x = x^2$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

366. Dowieść, że równanie

$$x^{2023}+x=2023$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

367. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

368. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1{,}000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

369. Rozważamy funkcję $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}\,.$$

Udowodnić, że funkcja f nie spełnia warunku Lipschitza[1].

370. Udowodnić, że funkcja z poprzedniego zadania jest jednostajnie ciągła. W tym celu udowodnić, że dla każdych $x,y\geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{|x-y|}\,.$$

371. Dla których liczb

$$n\in\left\{2,\ 4,\ 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200,\ 500,\ 1000,\ 10^5,\ 10^{10},\ 10^{30},\ 10^{100},\ 10^{1000}\right\}$$

wykres funkcji

$$f(x)=2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x)=x^n+4\,,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm? Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

[1]Mówimy, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli istnieje taka stała C, że dla każdych $x,y\in D_f$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$