286. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$
Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f jest krzywą o równaniu
$$y=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,,$$
czyli
$$24y+25x=\sqrt{49x^2+37}\,.$$
Z powyższego rówania wynika
$$24y+24x=\sqrt{49x^2+37}-x\geqslant\sqrt{49x^2+37}-|x|=\sqrt{49x^2+37}-\sqrt{x^2}>0\,,$$
a z podobnego równania
$$24y+25x=-\sqrt{49x^2+37}$$
dochodzimy do
$$24y+24x=-\sqrt{49x^2+37}-x\leqslant-\sqrt{49x^2+37}+|x|=-\sqrt{49x^2+37}+\sqrt{x^2}<0\,.$$
Zatem równanie wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$. Otrzymujemy kolejno
$$576y^2+1200xy+625x^2=49x^2+37, \qquad x+y>0$$
$$576y^2+1200xy+576x^2=37, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x=y$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

287. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia
$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\,,$$
który przy założeniu $a+b\neq0$ można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$
Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+10^4}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+10^4}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+10^4}-\sqrt[4]{y^2+10^4}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^2+10^4)-(y^2+10^4)}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4},$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}<1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+10^4}+\sqrt[4]{0+10^4}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot 1=\frac{|x-y|}{20}.$$

288. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^4+1}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^4+1}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{y^4+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^4+1)-(y^4+1)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}\right|= \tag{1}$$

$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}\,. \tag{2}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}<1\,. \tag{3}$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2=\sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}<1\,. \tag{4}$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}\leqslant|x-y|\cdot1\cdot1=|x-y|\,.$$

289. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^4+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^4+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^4+10^8}-\sqrt[8]{y^4+10^8}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^4+10^8)-(y^4+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\,. \qquad (1)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}<1\,. \qquad (2)$$

Z kolei równość $x^2=\sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}<1\,. \qquad (3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,. \qquad (4)$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot1\cdot1=\frac{|x-y|}{20}\,.$$

290. Niech funkcja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[16]{x}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[1,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności stosując czterokrotnie wzór na różnicę kwadratów[1], a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x,\, y \geqslant 1$:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sqrt[16]{x}-\sqrt[16]{y}\right| = \frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{x}+\sqrt[16]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{1}+\sqrt[16]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{1}+\sqrt[8]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1}\right)\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)} = \frac{|x-y|}{16}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\, y \geqslant 1$.

291. Niech funkcja $f:[3,\,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\, y \in [3,\,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{25}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\, y \geqslant 3$:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right| = \left|\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}\right| = \frac{|x-y|\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^3y^3} =$$

$$= |x-y|\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{xy}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right) = |x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^3y}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |x-y|\cdot\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}\right) = |x-y|\cdot\frac{3}{3^4} = |x-y|\cdot\frac{1}{3^3} = \frac{|x-y|}{27} \leqslant \frac{|x-y|}{25}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\, y \geqslant 3$.

292. Niech funkcja $f:[16,\,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\, y \in [16,\,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{128}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\, y \geqslant 16$:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right| = \frac{\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right|}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\sqrt[4]{xy}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)} =$$

$$= \frac{|x-y|}{\sqrt[4]{xy}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} \leqslant \frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16\cdot 16}\cdot\left(\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{16}\right)\cdot\left(\sqrt{16}+\sqrt{16}\right)} =$$

[1] Można również zastosować ogólny wzór na różnicę n-tych potęg dla $n=16$.

$$=\frac{|x-y|}{4\cdot(2+2)\cdot(4+4)}=\frac{|x-y|}{128},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\ y\geqslant 16$.

293. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\ y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/60$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\ y\geqslant 8$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{xy}\leqslant\frac{|x-y|}{8\cdot 8}=\frac{|x-y|}{64}\leqslant\frac{|x-y|}{60},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=1/60$ i dowolnych $x,\ y\geqslant 8$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/80$.

Rozwiązanie:

Dla $x=8$ oraz $y=9$ mamy $|x-y|=1$ oraz

$$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{72}>\frac{|x-y|}{80},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x,\ y\geqslant 8$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C=1/80$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\ y\in[8,\infty)$.

294. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\ y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\ y\geqslant 25$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt{25}+\sqrt{25}}=\frac{|x-y|}{5+5}=\frac{|x-y|}{10},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=1/10$ i dowolnych $x,\ y\geqslant 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x=25$ oraz $y=36$ mamy $|x-y|=11$ oraz

$$|f(x)-f(y)|=1=\frac{|x-y|}{11}>\frac{|x-y|}{12},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb x, $y \geqslant 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y \in [25, \infty)$.

295. Dla funkcji $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y| .$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = \left|x^2 - y^2\right| = (x+y) \cdot |x-y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$x + y > 100 .$$

Możemy więc wskazać $x = 50$, $y = 51$.

296. Dla funkcji $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y| .$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{xy} \cdot |x-y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy} > 100 ,$$

czyli

$$xy < \frac{1}{100} .$$

Możemy więc wskazać $x = 1/10$, $y = 1/11$.

297. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 10^8} .$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 0,6 \cdot |x - y| .$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do

$$|f(x)-f(y)|=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}\,.$$

Dana w treści zadania nierówność będzie spełniona, jeżeli $x\neq y$ oraz

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}>0,6\,. \tag{1}$$

Dla uzyskania nierówności (1) wystarczy przyjąć, że x i y są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunki

$$x>0,6\cdot\sqrt{x^2+10^8} \tag{2}$$

oraz

$$y>0,6\cdot\sqrt{y^2+10^8}\,. \tag{3}$$

Przekształcanie nierówności (2) prowadzi (przy założeniu dodatniości x) do nierówności równoważnych:

$$x^2>0,6^2\cdot x^2+0,6^2\cdot 10^8\,,$$

$$0,64\cdot x^2>0,36\cdot 10^8\,,$$

$$x^2>\frac{0,36\cdot 10^8}{0,64}\,,$$

$$x^2>\frac{36\cdot 10^8}{64}\,,$$

$$x>\frac{6\cdot 10^4}{8}\,,$$

$$x>\frac{3\cdot 10^4}{4}\,,$$

$$x>7500\,.$$

Analogicznie nierówność (3) jest równoważna nierówności $y>7500$.

Dana w treści zadania nierówność jest więc prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y większych od 7500, np. dla $x=7501$ i $y=7502$.

298. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\}\,,$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{0}$

b) $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{0}$

c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$

d) $a=2$, $b=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{0}$

e) $a=\mathbf{-3}$, $b=3$, $c=\mathbf{0}$

f) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=5$

299. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$ **b)** $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{2}$

c) $a=\mathbf{-3}$, $b=\mathbf{3}$, $c=3$ **d)** $a=4$, $b=\mathbf{-4}$, $c=\mathbf{-4}$

e) $a=\mathbf{-5}$, $b=5$, $c=\mathbf{5}$ **f)** $a=\mathbf{-6}$, $b=\mathbf{6}$, $c=6$

300. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=\mathbf{3}$, $e=\mathbf{3}$

b) $a=1$, $b=2$, $c=$ **NIE**, $d=4$, $e=$ **NIE**

c) $a=1$, $b=\mathbf{3}$, $c=\mathbf{5}$, $d=4$, $e=5$

d) $a=\mathbf{2}$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

e) $a=6$, $b=7$, $c=\mathbf{10}$, $d=\mathbf{13}$, $e=10$

f) $a=6$, $b=\mathbf{3}$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

301. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=a+3b$$

oraz

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a+3b=b\,,$$

czyli

$$a=-2b\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a=-2b$.

302. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ **–3**, $d=$ **–3**
b) $a=$ **–5**, $b=2$, $c=3$, $d=$ **3**
c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$, $d=4$
d) $a=2$, $b=3$, $c=$ **–5**, $d=$ **–5**
e) $a=$ **–9**, $b=3$, $c=6$, $d=$ **6**
f) $a=$ **dowolne**, $b=$ **–6–a**, $c=6$, $d=6$

303. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d\,,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=-$**5**, $b=2$, $c=3$, $d=4$
b) $a=1$, $b=-$**4**, $c=3$, $d=4$
c) $a=1$, $b=2$, $c=-$**3**, $d=4$
d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ **NIE**

304. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie:

Oczywiście funkcja f jest ciągła w każdym punkcie różnym od a i b.

Ponadto
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=4$$
oraz
$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\left|a^2-5\right|,$$
skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy
$$4=\left|a^2-5\right|.$$
Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do
$$a^2-5=\pm 4,$$
$$a^2=5\pm 4,$$
skąd $a\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Podobnie
$$\lim_{x\to b^-} f(x)=\left|b^2-5\right|$$
oraz
$$f(b)=\lim_{x\to b^+} f(x)=4,$$
skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy
$$4=\left|b^2-5\right|,$$
czyli $b\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Zatem funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a,b\in\{-3, -1, 1, 3\}$, co w połączeniu z warunkiem $a<b$ prowadzi do sześciu par (a, b) spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez pary $(-3, -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

305. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $\quad a=\mathbf{-1}$, $\quad b=\mathbf{1}$.

306. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $\quad a=\mathbf{-3}$, $\quad b=\mathbf{3}$.

307. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $\quad a=\mathbf{-5}$, $\quad b=\mathbf{5}$.

308. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $\qquad a=-\sqrt{\mathbf{57}}, \qquad b=\sqrt{\mathbf{57}}.$

309. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $\qquad a=-\mathbf{11}, \qquad b=\mathbf{11}.$

310. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<a \\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a=-\mathbf{1},\ b=\mathbf{0}$ $\qquad a=-\mathbf{1},\ b=\mathbf{1}$ $\qquad a=\mathbf{0},\ b=\mathbf{1}$

311. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 6 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\mathbf{1},\ b=\mathbf{3}$ $\qquad a=\mathbf{1},\ b=\mathbf{7}$ $\qquad a=\mathbf{1},\ b=\mathbf{9}$

$a=\mathbf{3},\ b=\mathbf{7}$ $\qquad a=\mathbf{3},\ b=\mathbf{9}$ $\qquad a=\mathbf{7},\ b=\mathbf{9}$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

312.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 1 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=-\mathbf{1}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

313.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

314.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=-\mathbf{1}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

315.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{-2}, \qquad b=\mathbf{3}.$$

316.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 2x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

317. $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$

$a=\mathbf{-8}$, $b=\mathbf{0}$

$a=\mathbf{-8}$, $b=\mathbf{8}$

$a=\mathbf{0}$, $b=\mathbf{8}$

318. $f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$

$a=\mathbf{-2\sqrt{2}}$, $b=\mathbf{0}$

$a=\mathbf{-2\sqrt{2}}$, $b=\mathbf{2\sqrt{2}}$

$a=\mathbf{0}$, $b=\mathbf{2\sqrt{2}}$

319. $f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$

$a=\mathbf{-2}$, $b=\mathbf{0}$

$a=\mathbf{-2}$, $b=\mathbf{2}$

$a=\mathbf{0}$, $b=\mathbf{2}$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

320. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x= -\infty$

321. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x= +\infty$

322. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x= +\infty$

323. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x= -\infty$

324. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x= +\infty$

325. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x= 0$

326. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x= 0$

327. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x= +\infty$

328. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$

329. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} 2x = \pi/2$

330. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x = \pi/2$

331. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x = -\pi/2$

332. $\lim\limits_{x\to64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64} = 1/48$

333. $\lim\limits_{x\to64} \dfrac{x-64}{\sqrt{x}-8} = 16$

334. $\lim\limits_{x\to64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = 1/3$

335. $\lim\limits_{x\to0^+} 2^{2^{1/x}} = +\infty$

336. $\lim\limits_{x\to0^-} 2^{2^{1/x}} = 1$

337. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{2^{1/x}} = 2$

338. $\lim\limits_{x\to0^+} 2^{2^{2^{1/x}}} = +\infty$

339. $\lim\limits_{x\to0^-} 2^{2^{2^{1/x}}} = 2$

340. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{2^{2^{1/x}}} = 4$

341. $\lim\limits_{x\to16^-} \{\log_4 x\} = 1$

342. $\lim\limits_{x\to16^+} \{\log_4 x\} = 0$

343. $\lim\limits_{x\to16^-} \{\log_8 x\} = 1/3$

344. $\lim\limits_{x\to16^+} \{\log_8 x\} = 1/3$

345. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$

346. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x = e^3$

347. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = e^{e^4}$

348. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = e^{e^{27}}$

349. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \mathbf{32}$

350. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \mathbf{9}$

351. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \mathbf{64}$

352. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\right) = \mathbf{0}$

353. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\Big)=\mathbf{5}$

354. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\Big)=\mathbf{3}$

355. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}}=\mathbf{e^2}$

356. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}}=\mathbf{e^8}$

357. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}}=\sqrt{\mathbf{e}}$

358. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt[4]{\mathbf{e}}$

359. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+x^3+x^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4}+\frac{3\cdot x^2}{4}=\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3\cdot x^2}{4}\geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyzanaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{4}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{x^2}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

Tyma razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+\frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-\frac{1}{4}$.

360. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+4x^3+6x^2+1=x^4+4x^3+4x^2+2x^2+1=\left(x^2+2x\right)^2+2x^2+1>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=1\,.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+4x^3+6x^2+1)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)} =$$

$$= \frac{4}{(1+1)\cdot(1+1)} = 1\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t = \frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right) = -1\,.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+4x^3+6x^2+1)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{\sqrt{x^4}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)} =$$

$$= \frac{4}{(-1-1)\cdot(1+1)} = -1\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}$$

przy $s=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-1$.

361. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}$.
Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$x^8+x^7+x^6+7=\left(x^4+\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{3x^6}{4}+7>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}=1+1=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$
$$=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{8}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^8-t^8}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[8]{x^8}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}\right)=1-1=0\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{x^2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt[4]{x^8}}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}-1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{8}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^8-t^8}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}$$

przy $s=\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+\frac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y=-\frac{1}{8}$.