Kolokwium nr 3: wtorek 6.12.2022, godz. 10:15-11:45, materiał zad. 1–362.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 28.11.2022, środę 30.11.2022 i poniedziałek 5.12.2022.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

7. Funkcje (c.d.)

286. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

287. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

288. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

289. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

290. Niech funkcja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[16]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[1,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

291. Niech funkcja $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[3,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,.$$

292. Niech funkcja $f:[16,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[16,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{128}\,.$$

293. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/60$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/80$.

294. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

295. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

296. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

297. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}\,.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>0,6\cdot|x-y|\,.$$

298. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=$ ...., $c=$ .... **b)** $a=$ ...., $b=2$, $c=$ ....

c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$ **d)** $a=2$, $b=$ ...., $c=$ ....

e) $a=$ ...., $b=3$, $c=$ .... **f)** $a=$ ...., $b=$ ...., $c=5$

299. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=$ ...., $c=$ .... **b)** $a=$ ...., $b=2$, $c=$ ....

c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$ **d)** $a=4$, $b=$ ...., $c=$ ....

e) $a=$ ...., $b=5$, $c=$ .... **f)** $a=$ ...., $b=$ ...., $c=6$

300. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ ...., $e=$ ....

b) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=4$, $e=$ ....

c) $a=1$, $b=$ ...., $c=$ ...., $d=4$, $e=5$

d) $a=$ ...., $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=$ ....

e) $a=6$, $b=7$, $c=$ ...., $d=$ ...., $e=10$

f) $a=6$, $b=$ ...., $c=8$, $d=9$, $e=$ ....

301. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

302. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=$ ....

b) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$ ...., $d=$ ....

e) $a=$ ...., $b=3$, $c=6$, $d=$ ....

f) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=6$, $d=6$

303. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

304. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

305. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

306. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

307. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

308. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

309. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

310. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad x<a\\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$

311. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{dla} \quad x<a\\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$

$a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,\ b=\ldots\ldots$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

312.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 1 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

313.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

314.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

315.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

316.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 2x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

317. $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

318. $$f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

319. $$f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

320. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

321. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

322. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

323. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

324. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

325. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

326. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

327. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

328. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x=$ ....

329. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}2x=$ ....

330. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x=$ ....

331. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x=$ ....

332. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=$ ....

333. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}=$ ....

334. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=$ ....

335. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{1/x}}=$ ....

336. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{1/x}}=$ ....

337. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{1/x}}=$ ....

338. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

339. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

340. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

341. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_4 x\}=$ ....

342. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_4 x\}=$ ....

343. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_8 x\}=$ ....

344. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_8 x\}=$ ....

345. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x= \ldots\ldots\ldots$

346. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x= \ldots\ldots\ldots$

347. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x}= \ldots$

348. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x}= \ldots$

349. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{5^{4^{3^x}}}= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

350. $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{2^{5^{4^x}}}= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

351. $\lim\limits_{x\to-\infty}4^{3^{2^{5^x}}}= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

352. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\big)= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

353. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\big)= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

354. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\big)= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

355. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}}= \ldots\ldots\ldots$

356. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}}= \ldots\ldots\ldots$

357. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}}= \ldots\ldots\ldots$

358. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}}= \ldots\ldots\ldots$

359. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

360. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}\,.$

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

361. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}\,.$

362. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\log_4(2^x+8^x)\,.$$