W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

244. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 1}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

245. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)^2}$ $D_f=[\mathbf{1,\ +\infty})$

246. $f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x-4)}$ $D_f=\mathbf{\{1\}}\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

247. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=[\mathbf{-1,\ 1}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

248. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=[\mathbf{-2,\ 1}]\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

249. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -2}]\cup[\mathbf{-1,\ 1}]\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

250. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)^2\cdot(x^2-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -2}]\cup\mathbf{\{-1\}}\cup\mathbf{\{1\}}\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

251. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x-16)}$ $D_f=[\mathbf{4,\ 9}]\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

252. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2022}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=\mathbf{\{4\}}\cup\mathbf{\{9\}}\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

253. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2021}\cdot(x-16)^{2022}}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 4}]\cup[\mathbf{9,\ +\infty})$

254. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 4}]\cup\mathbf{\{9\}}\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

255. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -4}]\cup\mathbf{\{4\}}\cup[\mathbf{9,\ +\infty})$

256. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=[\mathbf{-4,\ -3}]\cup[\mathbf{3,\ +\infty})$

257. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$
$=(\mathbf{-\infty,\ -4}]\cup[\mathbf{-3,\ -2}]\cup[\mathbf{2,\ 3}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

258. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^4-16)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -3}]\cup\mathbf{\{-2\}}\cup\mathbf{\{2\}}\cup[\mathbf{3,\ +\infty})$

259. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2x)\cdot(5-\log_2x)\cdot(3-\log_3x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 8}]\cup[\mathbf{27,\ 32}]$

260. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2x)\cdot(2-\log_5x)\cdot(3-\log_3x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 8}]\cup[\mathbf{25,\ 27}]$

261. $f(x)=\sqrt{(3-\log_4x)\cdot(6-\log_2x)\cdot(3-\log_3x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 27}]\cup\mathbf{\{64\}}$

262. $f(x)=\sqrt{\log_2\log_3 x}$ $D_f=[\mathbf{3},\ +\infty)$

263. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2 x}$ $D_f=[\mathbf{2},\ +\infty)$

264. $f(x)=\sqrt{\log_5\log_3\log_2 x}$ $D_f=[\mathbf{8},\ +\infty)$

265. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2\log_5 x}$ $D_f=[\mathbf{25},\ +\infty)$

266. $f(x)=\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ +\infty)$

267. $f(x)=\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ \mathbf{256})$

268. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ \mathbf{16})$

269. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ \mathbf{4})$

270. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=\left(\mathbf{1},\ \sqrt{\mathbf{2}}\right)$

271. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z następujących nierówności, wykorzystujących nierówność trójkąta oraz założenia o funkcji f:

$$|f(6)-f(0)|=|f(6)-f(10)+f(10)-f(0)|\leqslant|f(6)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant$$
$$\leqslant 10\cdot|6-10|+|10-0|=40+10=50\,.$$

272. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\quad\text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5\quad\text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$
$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(5)|\leqslant 10\cdot|8-5|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\left|\big(f(8)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\right|\leqslant|f(8)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 30+5=35\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5\,,$$
$$|f(10)-f(5)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(10)|\leqslant 10\cdot|8-10|=20\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\left|\big(f(8)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(8)-f(10)|+|f(10)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 20+5+5=30\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

273. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\quad\text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10\quad\text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,,\qquad\textbf{(wersja łatwiejsza)}$$
$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,.\qquad\textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(10)|\leqslant 10\cdot|17-10|=70\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)|=\left|\big(f(17)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(0)\big)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(17)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant 70+10=80\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)| \leqslant 10,$$
$$|f(20)-f(10)| \leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(20)| \leqslant 10 \cdot |17-20| = 30.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)| = \Big|\big(f(17)-f(20)\big)+\big(f(20)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(0)\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant |f(17)-f(20)|+|f(20)-f(10)|+|f(10)-f(0)| \leqslant 30+10+10=50,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

274. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)| \leqslant (x-y)^2.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0=x, \quad t_1=x+\frac{y-x}{n}, \quad t_2=x+2\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_3=x+3\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_4=x+4\cdot\frac{y-x}{n}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad t_{n-2}=x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_{n-1}=x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_n=x+n\cdot\frac{y-x}{n}=y.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności

$$|f(t_0)-f(t_1)| \leqslant (t_0-t_1)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2},$$
$$|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant (t_1-t_2)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2},$$
$$|f(t_2)-f(t_3)| \leqslant (t_2-t_3)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2},$$

....

$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})| \leqslant (t_{n-2}-t_{n-1})^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2},$$
$$|f(t_{n-1})-f(t_n)| \leqslant (t_{n-1}-t_n)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=$$
$$=|(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))| \leqslant$$

$$\leqslant |f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(x-y)^2}{n^2}=\frac{(x-y)^2}{n}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{(x-y)^2}{n}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

275. $a=1$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

276. $a=-1$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

277. $a=2$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{5}}$

278. $a=-2$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{5}}$

279. $a=3$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{10}}$

280. $a=-3$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{10}}$

281. $a=3/4$, $\quad b=\boldsymbol{-5/4}$

282. $a=-3/4$, $\quad b=\boldsymbol{-5/4}$

283. $a=4/3$, $\quad b=\boldsymbol{-5/3}$

284. $a=-4/3$, $\quad b=\boldsymbol{-5/3}$

285. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań **285.a-285.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

285.a. $f(x)=\{|x|\}$ **5**

285.b. $f(x)=\{x\}^2$ **1**

285.c. $f(x)=\{|x|\}^2$ **4**

285.d. $f(x)=\sqrt{\{x\}}$ **8**

285.e. $f(x)=\sqrt{\{|x|\}}$ **7**

285.f. $f(x)=\left\{\sqrt{|x|}\right\}$ **6**

285.g. $f(x)=\sqrt[5]{\{x\}}$ **9**

285.h. $f(x)=\{\sqrt[5]{x}\}$ **10**

285.i. $f(x)=\{x\}^5$ **2**

285.j. $f(x)=\{|x|\}^5$ **3**