W każdym z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

173. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-60}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1/11}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

174. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-70}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/11}$ Czy $\in Z$? **TAK**

175. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}-5n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{12/5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

176. $Z=\left\{\sqrt{25n^2-24n}-5n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-4}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{-12/5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

177. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}+\sqrt{25n^2-24n}-10n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE**

178. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^2\leqslant 9m^2\leqslant 25n^2\right\}$

$\inf Z=\mathbf{4/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{5/3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

179. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^2\leqslant 2m^2\leqslant 32n^2\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

180. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3n^2\leqslant m^2\leqslant 4n^2\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

181. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4m^2\leqslant n^2\leqslant 5m^2\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{1/\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

182. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^n\leqslant 2^m\leqslant 4^n\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\log_2 3}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

183. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^m\leqslant 2^n\leqslant 5^m\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\log_5 2}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

184. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 27^{n^2}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

185. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 32^{n^2}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

186. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 9^{m^2}\leqslant 25^{n^2}\right\}$

$\inf Z=\sqrt{\mathbf{log_9 16}}=\sqrt{\mathbf{log_3 4}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z=\sqrt{\mathbf{log_9 25}}=\sqrt{\mathbf{log_3 5}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

187. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^n\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 27^n\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

188. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^{24n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{18n}\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{8}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{9}$ Czy $\in Z$? **TAK**

189. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^{8n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{160n}\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{32}$ Czy $\in Z$? **TAK**

190. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^{64n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{81n}\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{16}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{27}$ Czy $\in Z$? **TAK**

191. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^2: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{1/100}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{9/25}$ Czy $\in Z$? **NIE**

192. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^3: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-27/125}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{8/125}$ Czy $\in Z$? **TAK**

193. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

194. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2}: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/16}$ Czy $\in Z$? **TAK**

195. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1}$ Czy $\in Z$? **TAK**

196. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+370}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1/5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK**

197. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+390}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK**

198. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+410}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/10}$ Czy $\in Z$? **TAK**

199. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+430}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/30}$ Czy $\in Z$? **TAK**

200. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\wedge 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$

$\inf Z=\mathbf{5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt{27}=3\cdot\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

201. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\wedge 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt[3]{25}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

202. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\wedge 16^n\leqslant 8^m\leqslant 27^n\right\}$

$\inf Z=\mathbf{4/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\log_8 27=\boxed{\boldsymbol{\log_2 3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

203. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\wedge 16^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$

$\inf Z=\log_9 16=\boxed{\boldsymbol{\log_3 4=2\cdot\log_3 2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{3/2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

204. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

205. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{5}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{2-\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

206. $Z=\left\{\binom{50}{n}: n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{25}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

207. $Z=\left\{\binom{50}{n}\cdot(-1)^n: n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

$\inf Z=-\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{25}}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{24}}=\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{26}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

208. $Z=\left\{\sqrt{x^2+2x+1}: x\in(-5,\,2)\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **NIE**

209. $Z=\left\{\sqrt[4]{x^2+2x+1}: x\in(-5,\,2)\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

210. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^3\cdot n^{15}\leqslant m^{15}\leqslant 3^5\cdot n^{15}\right\}$

$\inf Z=\sqrt[5]{\mathbf{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\sqrt[3]{\mathbf{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

211. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^2\cdot n^{10}\leqslant m^{10}\leqslant 2^5\cdot n^{10}\right\}$

$\inf Z=\sqrt[5]{\mathbf{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\sqrt{\mathbf{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

212. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^2\cdot n^{6}\leqslant m^{6}\leqslant 2^3\cdot n^{6}\right\}$

$\inf Z=+\boldsymbol{\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=-\boldsymbol{\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE**

213. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 8^{mn}\right\}$

$\inf Z=\sqrt{\mathbf{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

214. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 4^{mn}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

215. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 81^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 11^{mn}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{\log_3 11}$ Czy $\in Z$? **NIE**

216. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 5^{mn}\right\}$

$\inf Z=\sqrt{\mathbf{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{\log_2 5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

217. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 32^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 3^{mn}\right\}$
$\inf Z=\boldsymbol{+\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{-\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE**

218. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$
$\inf Z=\mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{9}$ Czy $\in Z$? **TAK**

219. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^4\leqslant m^4\leqslant 49n^4\right\}$
$\inf Z=\mathbf{5}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{7}$ Czy $\in Z$? **NIE**

220. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^{18^2\cdot n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{2^{11}\cdot n}\cdot n^m\right\}$
$\inf Z=\mathbf{81}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{256}$ Czy $\in Z$? **TAK**

221. $Z=\{\log_x 8: x\in[2,+\infty)\}$
$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

222. $Z=\{\log_x 32: x\in(0,1/2]\}$
$\inf Z=\mathbf{-5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE**

223. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/8}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/5}$ Czy $\in Z$? **TAK**

224. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+44}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/45}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/48}$ Czy $\in Z$? **TAK**

225. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/19}$ Czy $\in Z$? **TAK**

226. $Z=\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/9}$ Czy $\in Z$? **TAK**

227. $Z=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{1/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

228. $Z=\left\{x^n: x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)\wedge n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/2}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **NIE**

229. $Z=\{\log_2(2n-1)-\log_2 n:\, n\in\mathbb{N}\}$
$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1}$ Czy $\in Z$? **NIE**

230. $Z=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{6}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{6}$ Czy $\in Z$? **TAK**

231. $Z=\left\{\frac{1}{5^m-11^n}:\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

232. $Z=\left\{\frac{mn}{m^2+4n^2}:\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

233. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, |a_n-1|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **233.1-233.10** podaj odpowiedni kres zbioru.
233.1. $\sup\{a_1:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$
233.2. $\inf\{a_1:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$
233.3. $\sup\{a_2:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{3/2}$
233.4. $\inf\{a_2:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1/2}$
233.5. $\sup\{a_2-a_3:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{5/6}$
233.6. $\inf\{a_2-a_3:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-5/6}$
233.7. $\sup\{a_3-a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1/2}$
233.8. $\inf\{a_3-a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-1/2}$
233.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{4}$
233.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$

234. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, \left|a_n-\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **234.1-234.10** podaj odpowiedni kres zbioru.
234.1. $\sup\{a_1:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$
234.2. $\inf\{a_1:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$
234.3. $\sup\{a_2:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1}$
234.4. $\inf\{a_2:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$
234.5. $\sup\{a_2-a_3:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1}$
234.6. $\inf\{a_2-a_3:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-2/3}$
234.7. $\sup\{a_3-a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2/3}$
234.8. $\inf\{a_3-a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-1/3}$
234.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$
234.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6:\,(a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$

235. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n-6|<\frac{n+1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **235.1-235.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

235.1. $\sup\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{8}$

235.2. $\inf\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{4}$

235.3. $\sup\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{7,5=15/2=7\frac{1}{2}}$

235.4. $\inf\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{4,5=9/2=4\frac{1}{2}}$

235.5. $\sup\{a_1-a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{3,5=7/2=3\frac{1}{2}}$

235.6. $\inf\{a_1-a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-3,5=-7/2=-3\frac{1}{2}}$

235.7. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty}a_n:\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{7}$

235.8. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty}a_n:\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{5}$

235.9. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_1):\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{3}$

235.10. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_1):\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{-3}$

236. W każdym z zadań **236.1-236.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{n}\,.$$

236.1. $A=\{a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf A=\mathbf{-\infty}$ $\sup A=\mathbf{+\infty}$

236.2. $B=\{a_3-a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf B=\mathbf{-3/2}$ $\sup B=\mathbf{3/2}$

236.3. $C=\{a_4-a_2:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf C=\mathbf{-5/6}$ $\sup C=\mathbf{5/6}$

236.4. $D=\{a_4-a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf D=\mathbf{-11/6}$ $\sup D=\mathbf{11/6}$

236.5. $E=\left\{(a_3-a_1)^2:(a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf E=\mathbf{0}$ $\sup E=\mathbf{9/4}$

236.6. $F=\left\{a_3^2-a_1^2:(a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf F=\mathbf{-\infty}$ $\sup F=\mathbf{+\infty}$

---

237. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}:\, m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.
Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m=1$ w wyrażeniu

$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}\,. \tag{$\heartsuit$}$$

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4+9n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\cdot n^{-1}+9n}=0\,.$$

3° Liczba $1/12$ jest elementem zbioru Z.
Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $m=3$ i $n=2$ w ($\heartsuit$).

4° Każdy element zbioru Z jest nie większy od $1/12$.
Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $4m^2$ i $9n^2$ otrzymujemy

$$\sqrt{4m^2\cdot 9n^2}\leqslant\frac{4m^2+9n^2}{2}\,,$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}\leqslant\frac{1}{12}\,.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1**° i **2**° stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3**° i **4**° wynika $\sup Z=1/12$.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/12.

238. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z=\left\{\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}:\, k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb $8k^3$, $27m^3$, $125n^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{8k^3\cdot 27m^3\cdot 125n^3}\leqslant\frac{8k^3+27m^3+125n^3}{3}\,,$$

czyli

$$\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}\leqslant\frac{1}{90}\,.$$

Zatem liczba $1/90$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z. Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k=15$, $m=10$ oraz $n=6$. Wówczas

$$\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}=\frac{900}{27000+27000+27000}=\frac{1}{90}$$

jest elementem zbioru Z.

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/90$.

239. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+3}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+5n+3}-n=\sqrt{n^2+5n+3}-\left(n+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}=\frac{n^2+5n+3-\left(n+\frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{n^2+5n+3-n^2-5n-\frac{25}{4}}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=-\frac{13/4}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy 2) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 2, a kres górny $5/2$.

240. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+10}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+5n+10}-n=\sqrt{n^2+5n+10}-\left(n+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}=\frac{n^2+5n+10-\left(n+\frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{n^2+5n+10-n^2-5n-\frac{25}{4}}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=\frac{15/4}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy 3) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $5/2$, a kres górny 3.

241. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{5^m-3^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=5^m-3^n>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia i parzysta, musi zachodzić $k\geqslant 2$. Zauważmy przy tym, że dla $m=n=1$ w istocie $k=2$. Zatem liczba $1/2$ jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=5^m-3^n<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna i parzysta, musi zachodzić $k\leqslant -2$. Zauważmy przy tym, że dla $m=2$, $n=3$ w istocie $k=25-27=-2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny $1/2$.

242. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{m^2-3n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k\geqslant 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m=2$ i $n=1$ w istocie $k=1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k, czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k\not\equiv 2\ (\ (\mathrm{mod}\ 3))$, musi zachodzić $k\neq -1$. W konsekwencji $k\leqslant -2$. Zauważmy ponadto, że dla $m=n=1$ otrzymujemy $k=-2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k=m^2-3n^2\equiv m^2\not\equiv 2\ (\ (\mathrm{mod}\ 3)) .$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny 1.

243. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{m^2-7n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-7n^2>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geqslant 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m=8$ i $n=3$ w istocie $k=1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 7n^2 < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k, czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 6\ ((\bmod\ 7))$ oraz $k \not\equiv 5\ ((\bmod\ 7))$, musi zachodzić $k \neq -1$ oraz $k \neq -2$. W konsekwencji $k \leqslant -3$. Zauważmy ponadto, że dla $m = 2$ i $n = 1$ otrzymujemy $k = -3$. Zatem liczba –1/3 jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 7 reszty 3, 5 ani 6.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k = m^2 - 7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 5\ ((\bmod\ 7))$$

oraz

$$k = m^2 - 7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 6\ ((\bmod\ 7)).$$

Dowód powyższego faktu sprowadza się do następujących tożsamości:

$$(7t)^2 = 7 \cdot \left(7t^2\right) + 0\,,$$

$$(7t \pm 1)^2 = 7 \cdot \left(7t^2 \pm 2t\right) + 1\,,$$

$$(7t \pm 2)^2 = 7 \cdot \left(7t^2 \pm 4t\right) + 4\,,$$

$$(7t \pm 3)^2 = 7 \cdot \left(7t^2 \pm 6t + 1\right) + 2\,.$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy –1/3, a kres górny 1.