Kolokwium nr 2: wtorek 22.11.2022, godz. 10:15-11:45, materiał zad. 1–243.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w środę 16.11.2022 i poniedziałek 21.11.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

5. Kresy zbiorów.

W każdym z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

173. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-60} : n\in\mathbb{N}\right\}$

174. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-70} : n\in\mathbb{N}\right\}$

175. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}-5n : n\in\mathbb{N}\right\}$

176. $Z=\left\{\sqrt{25n^2-24n}-5n : n\in\mathbb{N}\right\}$

177. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}+\sqrt{25n^2-24n}-10n : n\in\mathbb{N}\right\}$

178. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^2\leqslant 9m^2\leqslant 25n^2\right\}$

179. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^2\leqslant 2m^2\leqslant 32n^2\right\}$

180. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3n^2\leqslant m^2\leqslant 4n^2\right\}$

181. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4m^2\leqslant n^2\leqslant 5m^2\right\}$

182. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^n\leqslant 2^m\leqslant 4^n\right\}$

183. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^m\leqslant 2^n\leqslant 5^m\right\}$

184. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 27^{n^2}\right\}$

185. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 32^{n^2}\right\}$

186. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 9^{m^2}\leqslant 25^{n^2}\right\}$

187. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^n\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 27^n\cdot n^m\right\}$

188. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^{24n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{18n}\cdot n^m\right\}$

189. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^{8n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{160n}\cdot n^m\right\}$

190. $Z=\left\{\dfrac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^{64n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{81n}\cdot n^m\right\}$

191. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^2 : n\in\mathbb{N}\right\}$

192. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^3 : n\in\mathbb{N}\right\}$

193. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

194. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2} : n\in\mathbb{N}\right\}$

195. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2+n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

196. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+370} : n\in\mathbb{N}\right\}$

197. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+390} : n\in\mathbb{N}\right\}$

198. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+410} : n\in\mathbb{N}\right\}$

199. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+430} : n\in\mathbb{N}\right\}$

200. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$

201. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$

202. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^n\leqslant 8^m\leqslant 27^n\right\}$

203. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$

204. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

205. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{5}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

206. $Z=\left\{\binom{50}{n} : n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

207. $Z=\left\{\binom{50}{n}\cdot(-1)^n : n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

208. $Z=\left\{\sqrt{x^2+2x+1} : x\in(-5,\,2)\right\}$

209. $Z=\left\{\sqrt[4]{x^2+2x+1} : x\in(-5,\,2)\right\}$

210. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^3\cdot n^{15}\leqslant m^{15}\leqslant 3^5\cdot n^{15}\right\}$

211. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^2\cdot n^{10}\leqslant m^{10}\leqslant 2^5\cdot n^{10}\right\}$

212. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^2\cdot n^6\leqslant m^6\leqslant 2^3\cdot n^6\right\}$

213. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 8^{mn}\right\}$

214. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 4^{mn}\right\}$

215. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 81^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 11^{mn}\right\}$

216. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 8^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 5^{mn}\right\}$

217. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 32^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 3^{mn}\right\}$

218. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 8n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$

219. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 25n^4\leqslant m^4\leqslant 49n^4\right\}$

220. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 3^{18^2\cdot n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{2^{11}\cdot n}\cdot n^m\right\}$

221. $Z=\{\log_x 8: x\in[2,+\infty)\}$

222. $Z=\{\log_x 32: x\in(0,1/2]\}$

223. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$

224. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+44}: n\in\mathbb{N}\right\}$

225. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$

226. $Z=\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$

227. $Z=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}: n\in\mathbb{N}\right\}$

228. $Z=\left\{x^n: x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)\land n\in\mathbb{N}\right\}$

229. $Z=\{\log_2(2n-1)-\log_2 n: n\in\mathbb{N}\}$

230. $Z=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$

231. $Z=\left\{\frac{1}{5^m-11^n}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

232. $Z=\left\{\frac{mn}{m^2+4n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

233. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n-1| < \frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **233.1-233.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

233.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.5. $\sup\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.6. $\inf\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.7. $\sup\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.8. $\inf\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

233.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \left|a_n-\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **234.1-234.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

234.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.5. $\sup\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.6. $\inf\{a_2-a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.7. $\sup\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.8. $\inf\{a_3-a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

234.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

235. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}.$$

W każdym z zadań **235.1-235.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

235.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ ....

235.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ ....

235.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ ....

235.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ ....

235.5. $\sup\{a_1 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ ....

235.6. $\inf\{a_1 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} =$ ....

235.7. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ ....

235.8. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ ....

235.9. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_1) : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ ....

235.10. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_1) : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} =$ ....

236. W każdym z zadań **236.1-236.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

236.1. $A = \{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf A =$ .... $\sup A =$ ....

236.2. $B = \{a_3 - a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf B =$ .... $\sup B =$ ....

236.3. $C = \{a_4 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf C =$ .... $\sup C =$ ....

236.4. $D = \{a_4 - a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf D =$ .... $\sup D =$ ....

236.5. $E = \left\{(a_3 - a_1)^2 : (a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf E =$ .... $\sup E =$ ....

236.6. $F = \left\{a_3^2 - a_1^2 : (a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf F =$ .... $\sup F =$ ....

---

237. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

238. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru
$$Z=\left\{\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3} : k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

239. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\sqrt{n^2+5n+3}-n : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

240. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\sqrt{n^2+5n+10}-n : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

241. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{1}{5^m-3^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

242. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{1}{m^2-3n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

243. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{1}{m^2-7n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$