

W poniedziałek 24.10.2022 część pierwszej godziny ćwiczeń może być przeznaczona na konsultacje przed kolokwium 1.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w poniedziałek 24.10.2022 i środę 26.10.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zadania podobne do zdań wcześniejszych można pominąć,
jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania 77–105 są do samodzielnego rozwiązania,
a więc będą omawiane tylko na życzenie studentów.

3. Szacowanie liczb i wyrażeń.

Która z liczb jest większa ?

77. $123456 \cdot 123458$ czy 123457^2 78. $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$
 79. $(\sqrt[4]{83}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{83}-2)^{666}$ 80. $(\sqrt[4]{79}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-2)^{666}$
 81. $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{666}$ 82. $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{667}$
 83. 2^{1000} czy 3^{700} 84. 5^{444} czy 3^{700} 85. $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$ 86. $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$
 87. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$ 88. $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$ 89. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$
 90. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$ 91. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$ 92. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$
 93. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$ 94. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12 95. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$
 96. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$ 97. $\log_9 27$ czy $\log_4 8$ 98. $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
 99. $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$ 100. $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
 101. $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$ 102. $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
 103. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$ 104. $\log_2 3$ czy $\log_5 13$ 105. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do niektórych pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną

106. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{17})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{17})^{2015}$?
 107. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{37})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{37})^{2015}$?
 108. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{57})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{57})^{2015}$?
 109. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{77})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{77})^{2015}$?

128. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leq \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leq 4C \cdot n^k.$$

129. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n} \right| < \frac{D}{n^3}.$$

130. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 6C$ (wersja łatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja trudniejsza).

131. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$ (wersja najłatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja średnio trudna).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 2C$ (wersja najtrudniejsza).

132. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D , a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leq \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{4n^2+2} + \sqrt{4n^2+3} + \sqrt{4n^2+4} + \dots + \sqrt{16n^2-1} + \sqrt{16n^2} \leq Dn^k.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C :

- Przy $D/C \geq 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

133. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5)^s}{(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4)^t} \leq 18C.$$