10. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$ zachodzi równość
$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=4$ mamy
$$L=\binom{4}{4}=1$$
oraz
$$P=\binom{5}{5}=1\,.$$
Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1=1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n\geqslant 4$ będzie taką liczbą naturalną, że
$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$
Wykażemy, że wówczas
$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+2}{5}.$$
Wychodząc od lewej strony powyższej równości i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy
$$L=\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+1}{5}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+2}{5}=P\,.$$
Powyżej wykorzystaliśmy wzór
$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}=\binom{m+1}{k+1}$$
dla $m=n+1$ oraz $k=4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n\geqslant 4$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$.

11. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=2$ mamy
$$L=\frac{1}{3}$$

oraz
$$P=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\,.$$
Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1/3=1/3$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n\geqslant 2$ będzie taką liczbą naturalną, że
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}\,.$$
Wykażemy, że wówczas
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}+\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2+n+1)}\,, \qquad (\clubsuit)$$
gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $(n+1)^2-(n+1)+1=n^2+n+1$.

Wychodząc od lewej strony równości ($\clubsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy
$$L=\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}+\frac{n}{n^4+n^2+1}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}+\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}+\frac{n}{(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{n^2+n+1}{2\cdot(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}+\frac{2n}{2\cdot(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{n^2-n+1}{2\cdot(n^2-n+1)\cdot(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2+n+1)}=P\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n\geqslant 2$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$.

12. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k<n$ spełniających równanie
$$k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na wartość współczynnika dwumianowego otrzymujemy
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad \text{oraz} \qquad \binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\,,$$
co po wstawieniu do równania danego w zadaniu prowadzi do
$$k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}\,.$$

To z kolei daje kolejno równoważne postaci tego równania:

$$\frac{k}{k!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)}=\frac{1}{k!\cdot(k+1)\cdot(n-k-1)!}\,,$$

$$\frac{k}{(n-k)}=\frac{1}{(k+1)}\,,$$

$$k\cdot(k+1)=n-k\,,$$

$$k\cdot(k+1)+k=n\,,$$

$$k^2+2k=n\,. \qquad (\spadesuit)$$

Zatem równanie dane w treści zadania jest równoważne równaniu ($\spadesuit$). Stąd wynika, że rozwiązaniem tego równania jest każda para (k,n), gdzie k jest dowolną liczbą naturalną oraz $n=k^2+2k$.

13. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ lewa strona dowodzonej nierowności ma wartość 1, a prawa $12/10=6/5$. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1<6/5$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4+(n+1)^4<\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2\cdot(2n+3)}{10}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności ($\clubsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4+(n+1)^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}+(n+1)^4=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(n^2\cdot(2n+1)+10\cdot(n+1)^2\right)=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(2n^3+n^2+10n^2+20n+10\right)=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(2n^3+11n^2+20n+10\right).$$

Z kolei prawą stronę nierówności ($\clubsuit$) możemy zapisać jako

$$P=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2\cdot(2n+3)}{10}=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot(n+2)^2\cdot(2n+3)=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(n^2+4n+4\right)\cdot(2n+3)=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(2n^3+8n^2+8n+3n^2+12n+12\right)=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(2n^3+11n^2+20n+12\right).$$

Stąd otrzymujemy

$$L<\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(2n^3+11n^2+20n+10\right)<\frac{(n+1)^2}{10}\cdot\left(2n^3+11n^2+20n+12\right)=P\,,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

14. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(n+1)\cdot\binom{2n}{n}=4$ oraz $4^n=4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\geqslant 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+2)\cdot\binom{2n+2}{n+1}\geqslant 4^{n+1}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+2)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+2)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+2)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)^2}=(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\geqslant$$

$$\geqslant 4^n\cdot\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\geqslant 4^n\cdot 4=4^{n+1}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+2)(2n+1)\geqslant 4(n+1)(n+1)\,,$$

$$(n+2)(2n+1)\geqslant 2(n+1)(n+1)\,,$$

$$2n^2+5n+2\geqslant 2n^2+4n+2\,,$$

$$n\geqslant 0\,,$$

a to jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej n.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

15. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy $(n+2)\cdot\binom{2n}{n}=3\cdot 2=6$ oraz $3\cdot 2^{2n-1}=3\cdot 2=6$, a zatem obie strony nierówności mają tę samą wartość. Tak więc dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa bez względu na wybór kierunku nierówności.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\,,$$

gdzie w powyższej i wszystkich występujących dalej nierównościach w miejscu kropek należy konsekwentnie wstawić wybrany znak nierówności. Chcemy wykazać, że

$$(n+3)\cdot\binom{2n+2}{n+1}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n+1}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+3)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+3)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+3)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+2)(n+1)^2}=(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\cdot\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\cdot 4=3\cdot 2^{2n+1}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}\ldots\ldots\ldots 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+3)(2n+1)\ldots\ldots\ldots 4(n+2)(n+1)\,,$$

$$(n+3)(2n+1)\ldots\ldots\ldots 2(n+2)(n+1)\,,$$

$$2n^2+7n+3\ldots\ldots\ldots 2n^2+6n+4\,,$$

$$n\ldots\ldots\ldots 1\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla wszystkich $n\geqslant 1$, o ile w miejsce kropek wstawimy znak $\geqslant$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność dana w zadaniu, uzupełniona znakiem $\geqslant$, została udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

16. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:
Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}=4\cdot 2=8$$

oraz

$$7\cdot 4^{n-1}=7\cdot 4^0=7\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $8>7$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+4)\cdot\binom{2n+2}{n+1}>7\cdot 4^{n}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+4)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+4)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+4)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+3)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+4)(2n+1)(2n+2)}{(n+3)(n+1)^2}=(n+3)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)}>$$

$$>7\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)}\geqslant 7\cdot 4^{n-1}\cdot 4=7\cdot 4^{n}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+4)(2n+1)\geqslant 4(n+3)(n+1)\,,$$

$$(n+4)(2n+1)\geqslant 2(n+3)(n+1)\,,$$

$$2n^2+n+8n+4\geqslant 2\left(n^2+n+3n+3\right)\,,$$

$$2n^2+9n+4\geqslant 2n^2+8n+6\,,$$

$$n\geqslant 2\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$. Sprawdzenie dla $n=2$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=2$ otrzymujemy

$$5 \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot 6 = 30 > 28 = 7 \cdot 4^1 .$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, a ponadto na początku rozwiązania wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geqslant 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > 4 , \qquad (\spadesuit)$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>2$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=3$.

17. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1} .$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(n+4) \cdot \binom{2n}{n} = 10$ oraz $2^{2n+1}=8$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $10>8$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1} .$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 2^{2n+3} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(n+5)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+5)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} =$$

$$=(n+4)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+5)(2n+1)(2n+2)}{(n+4)(n+1)^2}=(n+4)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)}>$$

$$>2^{2n+1}\cdot\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)}\geqslant 2^{2n+1}\cdot 4=2^{2n+3}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(n+5)(2n+1)\geqslant 4(n+4)(n+1)\,,$$

co kolejno przekształca się do

$$(n+5)(2n+1)\geqslant 2(n+4)(n+1)\,,$$

$$2n^2+11n+5\geqslant 2n^2+10n+8\,,$$

czyli $n\geqslant 3$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ oraz $n=3$. Sprawdzenie dla $n=3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$6\cdot\binom{4}{2}=36>32=2^5\,.$$

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$7\cdot\binom{6}{3}=7\cdot 20=140>128=2^7\,.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$ oraz dla $n=2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)}\geqslant 4$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)}>4\,,$$

♠

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=4$.

18. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{2n}{n}^2 \geqslant 4^{2n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=1\cdot\binom{2}{1}^2=1\cdot 2^2=4$$

oraz

$$P=4^{2\cdot 1-1}=4^1=4\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\geqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$n\cdot\binom{2n}{n}^2 \geqslant 4^{2n-1}\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$(n+1)\cdot\binom{2n+2}{n+1}^2 \geqslant 4^{2n+1}\,. \tag{$\diamondsuit$}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$n\cdot\binom{2n}{n}^2=n\cdot\left(\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\right)^2=n\cdot\frac{((2n)!)^2}{(n!)^4}=\frac{((2n)!)^2}{(n-1)!\cdot(n!)^3}\,.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z załozenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=(n+1)\cdot\binom{2n+2}{n+1}^2=(n+1)\cdot\frac{((2n+2)!)^2}{((n+1)!)^4}=(n+1)\cdot\frac{((2n)!)^2\cdot(2n+1)^2\cdot(2n+2)^2}{(n-1)!\cdot n\cdot(n!)^3\cdot(n+1)^4}=$$

$$=\frac{((2n)!)^2}{(n-1)!\cdot(n!)^3}\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n+1)^2\cdot(2n+2)^2}{n\cdot(n+1)^4}=\frac{((2n)!)^2}{(n-1)!\cdot(n!)^3}\cdot\frac{(2n+1)^2\cdot 2^2}{n\cdot(n+1)}\geqslant$$

$$\geqslant 4^{2n-1}\cdot\frac{4\cdot(2n+1)^2}{n\cdot(n+1)}\geqslant 4^{2n-1}\cdot 4^2=4^{2n+1}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4\cdot(2n+1)^2}{n\cdot(n+1)}\geqslant 4^2\,. \tag{$\heartsuit$}$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$4\cdot(2n+1)^2\geqslant 4^2\cdot n\cdot(n+1)\,,$$

$$(2n+1)^2\geqslant 4\cdot n\cdot(n+1)\,,$$

$$4n^2+4n+1\geqslant 4n^2+4n\,,$$

$$1 \geqslant 0\,,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

19. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{4}{1}=4$$

oraz

$$P=4^1=4\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n+1} \leqslant 4^{n+1}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$\binom{2n+2}{n}=\frac{(2n+2)!}{n!\cdot(n+2)!}\,.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\binom{2n+4}{n+1}=\frac{(2n+4)!}{(n+1)!\cdot(n+3)!}=\frac{(2n+2)!}{n!\cdot(n+2)!}\cdot\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)}\leqslant$$

$$\leqslant 4^n\cdot\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)}\leqslant 4^n\cdot 4=4^{n+1}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)\cdot(2n+4)}{(n+1)\cdot(n+3)} \leqslant 4\,. \qquad (\heartsuit)$$

Nierówność $(\heartsuit)$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(2n+3)\cdot(2n+4) \leqslant 4\cdot(n+1)\cdot(n+3)\,,$$

$$(2n+3)\cdot(n+2) \leqslant 2\cdot(n+1)\cdot(n+3)\,,$$

$$2n^2+7n+6 \leqslant 2n^2+8n+6\,,$$

$$0 \leqslant n\,,$$

a zatem nierówność $(\heartsuit)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności $(\clubsuit)$ wynika nierówność $(\diamondsuit)$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Sposób II:

Idea rozwiązania:

Wykażemy, że lewa strona dowodzonej nierówności, czyli liczba $\binom{2n+2}{n}$, jest sumą **czterech** liczb występujących w $2n$-tym wierszu trójkąta Pascala (rozszerzonego do dolnej półpłaszczyzny umownymi zerami). Z kolei prawa strona dowodzonej nierówności jest sumą **wszystkich** wyrazów tego wiersza. Ponieważ wyrazy trójkąta Pascala są nieujemne, suma kilku wyrazów jednego wiersza nie przekracza sumy wszystkich wyrazów tego wiersza.

Rozwiązanie właściwe:

Korzystając ze wzorów

$$\binom{m}{k}=\binom{m-1}{k-1}+\binom{m-1}{k} \qquad \text{oraz} \qquad \binom{m}{k}=\binom{m}{m-k}$$

otrzymujemy

$$\binom{2n+2}{n}=\binom{2n+1}{n-1}+\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}=$$

$$=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n-2}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n+1}=$$

$$=\sum_{k=n-2}^{n+1}\binom{2n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=(1+1)^{2n}=2^{2n}=4^n\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Uwagi:

Dla $n=1$ składnik $\binom{2n}{n-2}=\binom{2}{-1}$ jest legalny i ma wartość 0.

Podobnie, poprawnym, choć może nieco dziwnym sposobem zapisania sumy $\sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ jest

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{2n}{k} .$$

Jeśli ktoś się brzydzi rozszerzaniem trójkąta Pascala przez wypełnienie dolnej półpłaszczyzny zerami, może po prostu sprawdzić prawdziwość dowodzonej nierówności dla $n=1$, a dalszą część rozumowania przeprowadzić dla $n \geqslant 2$ jak wyżej, bez konieczności odwoływania się do wyrazów rozszerzonego trójkąta Pascala równych 0.

20. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n .$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$\binom{2n+2}{n} = \binom{4}{1} = 4$$

oraz

$$\left(\frac{15}{4}\right)^n = \left(\frac{15}{4}\right)^1 = \frac{15}{4} ,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 > 15/4$, jest więc prawdziwa, gdyż $4 = 16/4$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n .$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+4}{n+1} > \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)}{n!(n+1)(n+2)!(n+3)} = \binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} >$$

$$> \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geqslant \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{15}{4} = \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1} ,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geqslant \frac{15}{4} .$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$4(2n+3)(2n+4) \geqslant 15(n+1)(n+3) ,$$

$$4\left(4n^2+14n+12\right) \geqslant 15\left(n^2+4n+3\right),$$

$$16n^2+56n+48 \geqslant 15n^2+60n+45,$$

$$n^2-4n+3 \geqslant 0,$$

$$(n-1)(n-3) \geqslant 0,$$

co jest prawdą dla wszystkich liczb całkowitych $n \neq 2$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n=1$ oraz $n \geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=3$. Sprawdzenie dla $n=3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Sprawdzenie dla $n=2$ nie jest konieczne, gdyż drugi krok indukcyjny został przeprowadzony także dla $n=1$, dowodząc tym samym implikacji $T(1) \Rightarrow T(2)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością. Jednak bezpośrednie sprawdzenie danej w treści zadania nierówności dla $n=2$ może być uznane za prostsze, niż powoływanie się na mini-dowód indukcyjny działający dla $n \leqslant 2$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym w dowodzie dla $n \geqslant 3$) Dla $n=3$ dana w treści zadania nierówność przyjmuje postać:

$$\binom{8}{3} > \left(\frac{15}{4}\right)^3,$$

co jest kolejno równoważne nierównościom:

$$56 > \frac{15^3}{4^3},$$

$$56 \cdot 64 > 15^3,$$

$$28 \cdot 128 > 3^3 \cdot 5^3,$$

$$28 \cdot 128 > 27 \cdot 125,$$

a ta nierówność jest prawdziwa, gdyż czynniki w iloczynie po jej lewej stronie są większe od odpowiednich czynników po stronie prawej.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona w jednym dowodzie indukcyjnym dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$, a w drugim dowodzie indukcyjnym dla $n \leqslant 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geqslant \frac{15}{4}$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} > \frac{15}{4},$$

♠

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=4$.

21. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25}\cdot\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}<\sqrt[n]{27}\cdot\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}=\frac{(5n)!}{n!\cdot(4n)!}\cdot\frac{(4n)!}{(2n)!\cdot(2n)!}=\frac{(5n)!}{n!\cdot(2n)!\cdot(2n)!}$$

oraz

$$\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}=\frac{(5n)!}{(2n)!\cdot(3n)!}\cdot\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}=\frac{(5n)!}{n!\cdot(2n)!\cdot(2n)!},$$

skąd

$$\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}=\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$\sqrt[n]{25}<\sqrt[n]{27},$$

jest więc prawdziwa jako nierówność $25<27$ podniesiona obustronnie do dodatniej potęgi $1/n$.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n, nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n)\Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

22. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65}\cdot n\leqslant 2^n+2^{71}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 64$.

Dla $n\leqslant 64$ zachodzą nierówności

$$2^{65}\cdot n\leqslant 2^{65}\cdot 64=2^{65}\cdot 2^6=2^{71}<2^n+2^{71},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 65$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=65$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{65}\cdot 65\,,$$

$$P=2^{65}+2^{71}=2^{65}+2^{6}\cdot 2^{65}=2^{65}+64\cdot 2^{65}=65\cdot 2^{65}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 65$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{65}\cdot n\leqslant 2^{n}+2^{71}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{65}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+2^{71}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 65$ otrzymujemy

$$L=2^{65}\cdot (n+1)=2^{65}\cdot n+2^{65}\leqslant 2^{n}+2^{71}+2^{65}\leqslant 2^{n}+2^{71}+2^{n}=2^{n+1}+2^{71}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

23. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n}\cdot\binom{2n}{n}>\binom{4n}{2n}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy $L=8$ oraz $P=6$, skąd $L>P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{2n}\cdot\binom{2n}{n}>\binom{4n}{2n}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$2^{2n+2}\cdot\binom{2n+2}{n+1}>\binom{4n+4}{2n+2}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości ($\clubsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=2^{2n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2}=4\cdot 2^{2n}\cdot\frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{\big(n!\big)^2\cdot(n+1)^2}=2^{2n}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}>$$

$$>\binom{4n}{2n}\cdot\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}=\frac{(4n)!}{\big((2n)!\big)^2}\cdot\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(4n)!\cdot(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}{\big((2n)!\big)^2\cdot(2n+1)^2\cdot(2n+2)^2}=\frac{(4n+4)!}{\big((2n+2)!\big)^2}=\binom{4n+4}{2n+2}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1} \geqslant \frac{(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}{(2n+1)^2\cdot(2n+2)^2}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Przekształcanie nierówności ($\heartsuit$) prowadzi do kolejnych nierówności równoważnych:

$$\frac{8\cdot(2n+1)}{n+1} \geqslant \frac{2\cdot(4n+1)\cdot(4n+3)}{(2n+1)\cdot(n+1)}\,,$$

$$4\cdot(2n+1) \geqslant \frac{(4n+1)\cdot(4n+3)}{2n+1}\,,$$

$$4\cdot(2n+1)^2 \geqslant (4n+1)\cdot(4n+3)\,,$$

$$16n^2+16n+4 \geqslant 16n^2+16n+3\,,$$

$$1 \geqslant 0\,,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby n.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

24. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28}\cdot n \leqslant 3^n+3^{31}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leqslant 27$.

Dla $n \leqslant 27$ zachodzą nierówności

$$3^{28}\cdot n \leqslant 3^{28}\cdot 27 = 3^{28}\cdot 3^3 = 3^{31} < 3^n+3^{31}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geqslant 28$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=28$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 3^{28}\cdot 28\,,$$

$$P = 3^{28}+3^{31} = 3^{28}+27\cdot 3^{28} = 28\cdot 3^{28}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n \geqslant 28$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$3^{28}\cdot n \leqslant 3^n+3^{31}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$3^{28}\cdot(n+1) \leqslant 3^{n+1}+3^{31}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 28$ otrzymujemy

$$L = 3^{28} \cdot (n+1) = 3^{28} \cdot n + 3^{28} \leqslant 3^n + 3^{31} + 3^{28} \leqslant 3^n + 3^{31} + 3^n = 2 \cdot 3^n + 3^{31} <$$
$$< 3 \cdot 3^n + 3^{31} = 3^{n+1} + 3^{31} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

25. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \frac{(6n)!}{(2n)! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{n! \cdot (3n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!}$$

oraz

$$\binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(6n)!}{(3n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!},$$

skąd

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$n < n+1,$$

jest więc prawdziwa.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n, nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

26. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}=\frac{2}{2}=1$$

oraz

$$\frac{3^{n-1}}{2}=\frac{1}{2}\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$1>\frac{1}{2}\,,$$

jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}\geqslant\frac{3^{n-1}}{2}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2}\geqslant\frac{3^{n}}{2}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(n+2)}=\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}\cdot\frac{2(2n+1)}{(n+2)}>$$

$$>\frac{3^{n-1}}{2}\cdot\frac{2(2n+1)}{(n+2)}\geqslant\frac{3^{n-1}}{2}\cdot 3=\frac{3^{n}}{2}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)}\geqslant 3\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(2n+1)\geqslant 3(n+2)\,,$$

co kolejno przekształca się do

$$4n+2\geqslant 3n+6\,,$$

czyli $n\geqslant 4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$, $n=3$ oraz $n=4$. Sprawdzenie dla $n=4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ oraz $n=3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{4}{2}}{3}=\frac{6}{3}=2>\frac{3}{2}=\frac{3^1}{2}\,.$$

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{6}{3}}{4}=\frac{20}{4}=5>\frac{9}{2}=\frac{3^2}{2}\,.$$

Dla $n=4$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{8}{4}}{5}=\frac{70}{5}=14>\frac{27}{2}=\frac{3^3}{2}\,.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$, $n=2$ oraz dla $n=3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)}\geqslant 3$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)}>3\,, \qquad \spadesuit$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=5$.

Chociaż nie jest to od razu widoczne, ani też nie jest istotne dla tego zadania, liczby $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ są całkowite. Chcesz wiedzieć więcej? Poszukaj hasła **Liczby Catalana**.

27. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}<9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}=2\cdot\sqrt{19}$$

oraz

$$P=9\cdot 4^{n-1}=9\cdot 4^0=9\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2\cdot\sqrt{19}<9$, czyli $\sqrt{76}<\sqrt{81}$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}<9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+2}{n+1}\cdot\sqrt{15n+19}<9\cdot 4^{n}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\sqrt{15n+19}\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{\sqrt{15n+19}(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{\sqrt{15n+19}(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=\sqrt{15n+4}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{\sqrt{15n+19}(2n+1)(2n+2)}{\sqrt{15n+4}(n+1)^2}=\sqrt{15n+4}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)}<$$

$$<9\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)}\leqslant 9\cdot 4^{n-1}\cdot 4=9\cdot 4^{n}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)}\leqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2\sqrt{15n+19}(2n+1)\leqslant 4\sqrt{15n+4}(n+1)\,,$$

$$\sqrt{15n+19}(2n+1)\leqslant 2\sqrt{15n+4}(n+1)\,,$$

$$(15n+19)\cdot(2n+1)^2\leqslant 4\cdot(15n+4)\cdot(n+1)^2\,,$$

$$60n^3+136n^2+91n+19\leqslant 60n^3+136n^2+92n+16\,,$$

$$3\leqslant n\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ i $n=3$. Sprawdzenie dla $n=3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$L=\binom{4}{2}\cdot\sqrt{34}=6\cdot\sqrt{34}<6\cdot\sqrt{36}=36\quad\text{oraz}\quad P=9\cdot 4^1=36\,,$$

skąd $L<P$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=3$ otrzymujemy

$$L=\binom{6}{3}\cdot\sqrt{49}=20\cdot 7=140\quad\text{oraz}\quad P=9\cdot 4^2=144\,,$$

skąd $L<P$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$ i $n=2$.