Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w środę 1.02.2023 i poniedziałek 6.02.2023.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szeregi liczbowe.

561. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

562. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8\,.$$

563. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

564. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

565. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 6\,.$$

566. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{4}{3}.$$

567. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

568. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5.$$

569. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T.

570. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13.$$

571. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

572. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}\,.$$

573. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}\,.$$

574. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}\,.$$

575. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}\,.$$

576. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\,.$$

577. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}\,.$$

578. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n}\,.$$

579. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}\,.$$

580. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}\,.$$

Niech

$$a_n = \frac{120}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

581. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ ....

582. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ ....

583. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ ....

584. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ ....

585. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) =$ ....

586. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) =$ ....

587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) =$ ....

588. $\sum\limits_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

589. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

590. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

Niech

$$a_n=\frac{60}{n(n+1)} \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

591. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ ....

592. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ ....

593. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1\cdot a_n)=$ ....

594. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_2\cdot a_n)=$ ....

595. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty}a_n=$ ....

596. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^3-a_{n+1}^3\right)=$ ....

597. $\sum_{n=1}^{\infty}\Big((a_n-a_{n+1})\cdot(a_n+a_{n+1})\Big)=$ ....

598. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

599. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

600. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_n^2+1600}-\sqrt{a_{n+1}^2+1600}\right)=$ ....

W każdym z poniższych 5 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

601. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

602. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

603. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+3]{n+3}\right)=$ ....

604. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

605. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

Niech $a_n=\frac{120}{n(n+2)}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

606. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ ....

607. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ ....

608. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ ....

609. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ ....

610. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ ....

611. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

612. $\sum\limits_{\mathbf{n=6}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

613. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

614. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right)=$ ....

615. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ ....